



TRANSFERÊNCIA DE CALOR:

UM GUIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PRÁTICOS

ARMANDO CARLOS F. COELHO OLIVEIRA

TRANSFERÊNCIA DE CALOR:
UM GUIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PRÁTICOS

1ª edição

Publicado pelo autor

Copyright © 2022

Qualquer parte desta publicação só pode ser reproduzida ou distribuída por qualquer meio com o consentimento do autor e referência da fonte

Este livro é publicado eletronicamente

ISBN 978-989-33-2674-9

*“Quem gosta da prática sem teoria assemelha-se ao
marinheiro que navega sem leme nem bússola,
nunca sabendo aonde irá parar.”*

Leonardo Da Vinci

Prefácio

Este livro resulta da experiência letiva e pedagógica do seu autor, como docente da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto ao longo de mais de 40 anos, nas áreas da Transferência de Calor (fundamental e aplicada).

Dessa experiência constatou o autor que, com muita frequência, os estudantes são levados a procurar “a equação”, ou conjunto de equações, para o mais rapidamente possível chegarem ao resultado (“solução”), sem discutirem as hipóteses subjacentes, e muitas vezes sem criticarem os resultados obtidos e o seu nível de aproximação à realidade física. O que na gíria académica se designa por aplicação da “receita” para obter “a solução”. Este livro debruça-se na resolução de problemas práticos. No entanto, mais do que fornecer as ditas “receitas”, tem como objetivo a discussão das hipóteses e métodos a aplicar, e a definição de uma metodologia para a obtenção da “solução”, discutindo também a aproximação a resultados reais.

Não é o intuito deste livro substituir os muitos manuais teóricos de Transferência de Calor existentes, muitos em língua inglesa e outros em língua portuguesa, que se dedicam a apresentar os principais conceitos e ferramentas teóricas para resolução de problemas. Muitos desses manuais contêm também exercícios resolvidos, no entanto em vários casos sem as preocupações expressas no parágrafo anterior. No presente texto, a metodologia geral para a resolução de problemas práticos assenta na compreensão dos fenómenos físicos e definição de hipóteses simplificativas, que levam à construção de um modelo de cálculo recorrendo às ferramentas conhecidas dos manuais teóricos. Fomenta-se a tomada de consciência de que por vezes não existe uma solução única, sendo que cada solução tem um dado nível de aproximação e depende das hipóteses consideradas.

Este livro cobre os tópicos tradicionalmente abordados num curso de Transferência de Calor básico (com a duração de 1 semestre). Assim, são abordados tópicos de condução (em regime permanente e instacionário, com aproximações 1D e 2D), convecção (forçada e natural, nas geometrias e fluidos mais simples), condensação em filme, ebulição em reservatório, e radiação térmica (envolvendo 1, 2 ou mais superfícies separadas por um meio não participante). Em cada tópico/capítulo são inicialmente apresentados os principais conceitos e soluções teóricas conhecidas, a que se segue a resolução e discussão de variados problemas práticos. Um último capítulo trata em mais detalhe exemplos da combinação dos vários modos de transferência de calor. Os 90 problemas apresentados e discutidos constituem casos de estudo representativos de situações típicas da prática da engenharia térmica, que permitem a consolidação dos conhecimentos.

Porto, Janeiro de 2022

Armando C. F. C. Oliveira

Conteúdos

1	Condução	1
1.1	Condução em regime permanente	2
1.1.1	Condução monodimensional em placa plana (sem e com fontes internas de calor)	2
1.1.2	Condução radial cilíndrica (sem e com fontes internas de calor)	5
1.1.3	Condução radial esférica (sem e com fontes internas de calor)	7
1.1.4	Condução monodimensional com convecção superficial (como em alhetas)	8
1.1.5	Condução bidimensional em placa e cilindro (métodos numéricos)	11
1.1.6	Problemas práticos resolvidos (P1.1 a P1.13)	14
1.2	Condução em regime instacionário	45
1.2.1	Sistema global	45
1.2.2	Condução monodimensional em placa, cilindro e esfera	46
1.2.3	Condução multidimensional instacionária (métodos numéricos)	49
1.2.4	Problemas práticos resolvidos (P1.14 a P1.22)	50
2	Convecção	67
2.1	Escoamentos, camadas limite e coeficiente de convecção	67
2.2	Escoamentos forçados externos: placa plana, cilindro e esfera	69
2.3	Escoamentos forçados internos	73
2.4	Escoamentos por diferença de temperatura (convecção natural)	78
2.5	Aplicação de métodos numéricos	81
2.6	Problemas práticos resolvidos (P2.1 a P2.20)	82
3	Condensação em filme	133
3.1	Condensação em filme e em gotas	133
3.2	Modelo simplificado de Nusselt	134
3.3	Correlações para placas, cilindros e esferas	135
3.4	Problemas práticos resolvidos (P3.1 a P3.7)	138
4	Ebulição em reservatório	153
4.1	Ebulição saturada e subarrefecida	153
4.2	Regimes de ebulição e correlações respetivas	154
4.3	Problemas práticos resolvidos (P4.1 a P4.6)	157
5	Radiação térmica	173
5.1	Radiação eletromagnética e térmica	173
5.2	Corpo negro e suas propriedades	174
5.3	Propriedades radiativas dos corpos reais	177
5.4	Radiosidade, irradiação e fator de visão	179
5.5	Trocas de radiação entre superfícies cinzentas e difusas em meio não participante	183
5.5.1	Trocas entre N superfícies formando um volume fechado	183
5.5.2	Trocas entre 2 superfícies formando um volume fechado	185
5.6	Problemas práticos resolvidos (P5.1 a P5.18)	187
6	Transferência de calor combinada	215
6.1	Considerações gerais	215
6.2	Problemas práticos resolvidos (P6.1 a P6.17)	216
	Referências	275

Lista de Símbolos

Os símbolos são fundamentais para a escrita de equações, sendo também a imagem simplificada de grandezas físicas conhecidas. Neste texto foi adotado um conjunto de símbolos semelhante ao encontrado na literatura da especialidade existente. No entanto, relativamente ao encontrado na maioria da literatura de origem anglo-americana, há algumas diferenças: as principais dizem respeito ao fluxo de calor e à potência calorífica, para os quais se usa respetivamente \dot{q} e \dot{Q} , denotando o ponto o calor por unidade de tempo, e a grandezas associadas aos fenómenos de radiação, como o poder emissivo ou a radiosidade. Para estas últimas, que são fluxos de calor, usa-se o mesmo símbolo geral desses fluxos (\dot{q}), distinguindo-se umas das outras pelo índice usado.

Símbolos em letras romanas

Símbolo	Designação	Unidade
A	Área	m^2
Bi	Número de Biot	-
c_p	Calor específico a pressão constante	$J/(kgK)$, ou $J/(kg^\circ C)$
D	Diâmetro	m
e	Espessura	m
F	Fração de energia emitida ou Fator de visão/forma	- -
Fo	Número de Fourier	-
g	Aceleração da gravidade	m/s^2
\dot{g}	Potência gerada por unidade de volume	W/m^3
H	Altura	m
$h; \bar{h}$	Coefficiente de convecção ou de transferência de calor ou Entalpia; Coefficiente médio numa dada superfície	$W/(m^2K)$, ou $W/(m^2^\circ C)$ J/kg $W/(m^2K)$, ou $W/(m^2^\circ C)$
i	Intensidade de radiação	$W/(m^2sr)$
k	Condutibilidade térmica	$W/(mK)$, ou $W/(m^\circ C)$
L	Comprimento ou Dimensão de referência	m
l	Largura	m
M	Massa	kg
m	Parâmetro usado em condução com convecção (e alhetas)	m^{-1}
\dot{M}	Caudal mássico	kg/s
$Nu; \overline{Nu}$	Número de Nusselt; Nu médio	-
P	Perímetro ou Parâmetro adimensional de condensação	m -
p	Pressão	N/m^2 ou Pa
Pr	Número de Prandtl	-
Q	Calor	J

\dot{Q}	Potência calorífica	W
\dot{q}	Fluxo calorífico	W/m ²
R	Resistência térmica	K/W, ou °C/W
r	Resistência térmica por unidade de área ou Coordenada espacial radial ou Raio	m ² K/W, ou m ² °C/W m m
Ra	Número de Rayleigh	-
Re	Número de Reynolds	-
$S; s$	Passo ou espaçamento	m
$T; \bar{T}$	Temperatura; Temperatura média	K, ou °C
t	Tempo	s
U	Coefficiente global de transferência de calor	W/(m ² K), ou W/(m ² °C)
V	Volume	m ³
v	Velocidade	m/s
\bar{v}	Velocidade média ou de caudal	m/s
x	Coordenada espacial cartesiana	m
y	Coordenada espacial cartesiana	m
z	Coordenada espacial cartesiana	m

Símbolos em letras gregas

Símbolo	Designação	Unidade
α	Difusibilidade térmica ou Coeficiente de absorção	m ² /s -
β	Coeficiente de expansão térmica	K ⁻¹ , ou °C ⁻¹
Δ	Variação	depende da variável associada
δ	Espessura da camada limite	m
η	Rendimento	-, ou %
θ	Ângulo, ou Coordenada espacial circunferencial ou Diferença de temperatura	rad K, ou °C
λ	Comprimento de onda	m, ou μ m
μ	Viscosidade dinâmica	kg/(s m)
ν	Viscosidade cinemática	m ² /s
ρ	Massa volúmica ou Coeficiente de reflexão	kg/m ³ -
σ	Constante de Stefan-Boltzmann ou Tensão superficial	W/(m ² K ⁴) N/m
τ	Coeficiente de transmissão ou Tensão viscosa	- N/m ²
ϕ	Ângulo, ou Coordenada espacial circunferencial	rad
ω	Ângulo sólido	sr

Índices*

Índice	Designação
<i>abs</i>	relativo a absorção de radiação
<i>alh</i>	relativo a alheta
<i>atm</i>	atmosférica
<i>b</i>	base (de uma alheta)
<i>c</i>	característica, ou corrigida
<i>cond</i>	relativo a condução
<i>conv</i>	relativo a convecção
<i>CN</i>	relativo a corpo negro
<i>cr</i>	crítico
<i>ebul</i>	relativo a ebulição
<i>em</i>	relativo a emissão de radiação
<i>ent</i>	entrada
<i>ext</i>	exterior
<i>h</i>	hidráulico
<i>hem</i>	hemisférico(a)
<i>i</i>	inicial
<i>inc</i>	relativo a radiação incidente
<i>int</i>	interior
<i>is</i>	isolante, ou isolamento
<i>l</i>	líquido
<i>m</i>	média, ou mistura
<i>n</i>	normal (a uma superfície)
<i>p</i>	parede
<i>rad</i>	relativo a radiação
<i>radios</i>	radiosidade
<i>ref</i>	relativo a reflexão de radiação
<i>s</i>	secção
<i>sai</i>	saída
<i>sat</i>	saturação
<i>sf</i>	interface sólido-fluido
<i>sol</i>	relativo à radiação solar
<i>sup</i>	superficial
<i>s/alh</i>	sem alhetas
<i>t</i>	tubo, ou térmica

<i>tot</i>	total
<i>trans</i>	relativo a transmissão de radiação
<i>v</i>	vapor
<i>x</i>	na direção <i>x</i>
<i>y</i>	na direção <i>y</i>
∞	longe da superfície (parede sólida)

* estes são os índices gerais usados; nalguns problemas práticos são usados índices específicos não listados aqui

1 Condução

No início deste capítulo apresentam-se os principais conceitos e soluções teóricas mais utilizadas na resolução de problemas práticos que envolvem a condução do calor. Os modos de transferência da convecção e radiação poderão estar presentes, mas são descritos por meios simplificados, como por exemplo através de um coeficiente de transferência constante e conhecido. O estudo foi dividido em 2 secções principais: a que trata da transferência em regime permanente ou estacionário, quando as temperaturas e fluxos se mantêm constantes no tempo, e a que trata do regime dinâmico ou instacionário, quando variam ao longo do tempo.

No caso do regime permanente abordam-se os casos monodimensionais (1D), nas geometrias mais simples (placa, cilindro e esfera), e é feita referência à utilização de métodos numéricos para casos bidimensionais (2D). Para o regime instacionário distinguem-se o caso em que se despreza a variação de temperatura no corpo (sistema global), e os casos em que se considera que a temperatura varia ainda numa direcção do espaço (placa, cilindro e esfera).

No final de cada secção apresentam-se diversos problemas práticos que ilustram a aplicação dos conceitos e métodos de cálculo vistos.

A distribuição de temperatura no interior de um sólido ou fluido em repouso com condutibilidade térmica constante – que será sempre assim considerada – pode obter-se a partir da chamada equação geral da condução. Esta resulta de um balanço de energia feito a um elemento de volume infinitesimal do material, que expressa que a variação da energia contida no elemento ao longo de tempo é o resultado do balanço das trocas de calor com os elementos adjacentes, e eventualmente da energia que se gera por unidade de tempo no elemento em causa. Como os fluxos de calor dependem da variação (gradiente) de temperatura no material – lei de Fourier – a temperatura num dado ponto depende da variação de temperatura no corpo.

A lei de Fourier pode expressar-se através da equação:

$$\dot{q} = -k \frac{\partial T}{\partial n} \quad (1.1)$$

sendo n a direcção/coordenada normal ao fluxo de calor. Como este é na realidade uma grandeza vetorial, o sinal negativo denota o facto de o fluxo ter o sentido oposto ao do aumento de temperatura, ou seja, o fluxo verifica-se no sentido oposto ao do gradiente de temperatura.

A equação geral da condução pode ser escrita de formas diferentes, consoante a geometria do corpo e do seu elemento de volume representativo, nomeadamente aplicando coordenadas cartesianas (elemento paralelepípedo), cilíndricas (elemento/porção de casca cilíndrica) ou esféricas (elemento/porção de casca esférica). A Figura 1.1 representa os 3 elementos infinitesimais referidos, bem como os eixos coordenados a considerar.

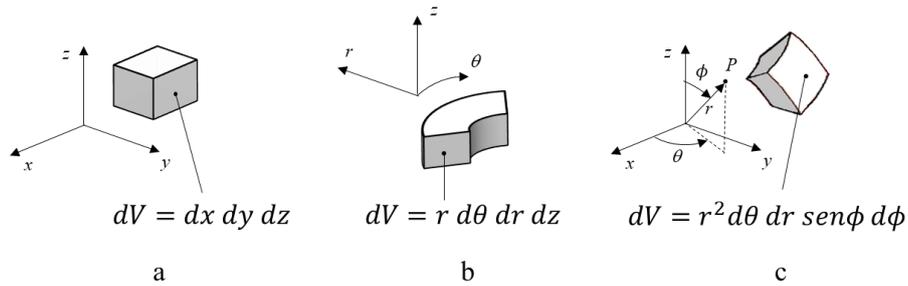


Figura 1.1 – Geometrias consideradas: (a) paralelepípedica; (b) cilíndrica; (c) esférica

A equação geral da condução pode então escrever-se nas formas:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \phi} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \text{sen} \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\text{sen} \phi \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.4)$$

O termo de geração de calor (\dot{g}) deverá ser considerado sempre que exista uma fonte de calor no interior do corpo. Um caso típico ocorre quando um material metálico é percorrido por corrente elétrica, gerando-se calor por efeito de Joule de modo uniforme (por unidade de volume). Na maioria das situações correntes esse termo será nulo.

O cálculo da distribuição de temperatura num corpo, e ao longo do tempo, exige então a resolução de uma das equações (1.2, 1.3 ou 1.4). Tal não é tarefa simples no caso geral de variação tridimensional (3D), ou mesmo bidimensional (2D), exigindo a utilização de métodos numéricos (aproximados). O cálculo das temperaturas depende ainda das condições nas fronteiras do espaço e da condição inicial. A partir das temperaturas, e usando a equação (1.1), podem calcular-se os fluxos de calor.

1.1 Condução em regime permanente

No caso do regime permanente não há alteração das temperaturas ao longo do tempo, pelo que o 2º membro das equações (1.2), (1.3) e (1.4) é igual a zero.

1.1.1 Condução monodimensional em placa plana (sem e com fontes internas de calor)

Para o caso de uma placa, variando a temperatura unicamente ao longo da coordenada x , a equação (1.2) reduz-se a:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{\dot{g}}{k} = 0 \quad (1.5)$$

e no caso de não existirem fontes de calor internas, à sua forma mais simples:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (1.6)$$

Estas equações podem ser utilizadas com boa aproximação quando uma placa com espessura (segundo x) muito menor que a sua secção (perpendicular à espessura) está sujeita a diferentes condições nas suas faces externas; tal equivale a considerar que a secção da placa – secção de passagem do calor – é infinita. Mas também podem aplicar-se se as superfícies nos limites da secção (direções y e z) estiverem perfeitamente isoladas termicamente, não havendo nelas transferência de calor; como por exemplo num cilindro isolado na superfície/raio exterior, com variação da temperatura ao longo do seu eixo, não havendo variação radial nem circunferencial da temperatura. Pode também considerar-se condução monodimensional em placas ou outras geometrias em que a secção (no plano y - z) tenha dimensões muito pequenas face ao comprimento segundo x , sendo desprezada a variação da temperatura ao longo de cada secção, embora neste caso seja necessária a consideração do que acontece na superfície exterior da secção, nomeadamente se existe convecção (a ver em 1.1.4). A Figura 1.2 ilustra estes casos.

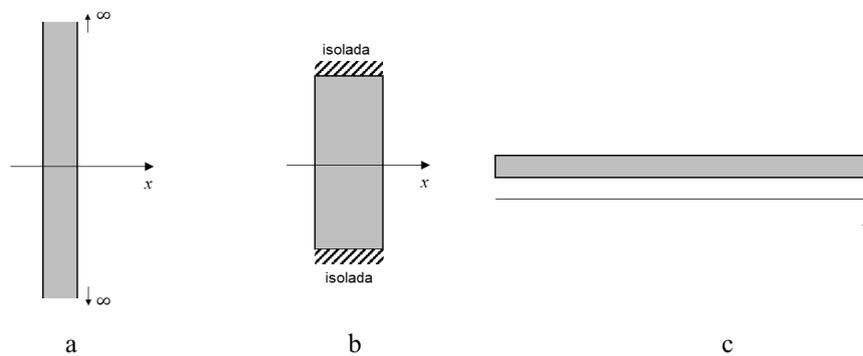


Figura 1.2 – Casos que podem ser tratados com condução monodimensional segundo x : (a) placa de secção infinita com condução ao longo da espessura; (b) corpo com qualquer secção e superfície exterior da secção isolada; (c) corpo com qualquer secção de dimensões pequenas face ao comprimento de condução.

A integração da equação (1.5) conduz a uma distribuição quadrática da temperatura (do 2º grau em x) quando o termo fonte é constante. A integração de (1.6) conduz a uma distribuição linear da temperatura ao longo de x . A solução para cada caso específico depende das condições fronteira existentes, que podem ser de temperatura imposta/conhecida, de fluxo de calor imposto/conhecido, ou de convecção (coeficiente e temperatura exterior conhecidos). As referências [1, 2] apresentam soluções para alguns desses casos. Na secção dedicada aos problemas práticos (1.1.6) serão vistas algumas, e a metodologia seguida para a sua obtenção.

Não existindo fontes de calor no interior do material, e sendo as temperaturas nas fronteiras extremas (x) T_1 e T_2 , pode concluir-se que a potência calorífica transferida através do material (de espessura e) é igual a:

$$\dot{Q} = \frac{k}{e} A_s (T_1 - T_2) \quad (1.7)$$

que mostra que a potência é proporcional a ΔT , e proporcional ao quociente kA_s/e . A mesma potência pode escrever-se com recurso à noção de resistência térmica, expressando que ela é igual à diferença de potencial térmico a dividir pela resistência de condução:

$$\dot{Q} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_{cond}} \quad (1.8)$$

Da comparação de (1.7) e (1.8) conclui-se que a resistência é proporcional à espessura e inversamente proporcional à condutibilidade e à área, ou seja:

$$R_{cond} = \frac{e}{kA_s} \quad (1.9)$$

É muitas vezes usada a resistência para uma área unitária, igual à espessura a dividir pela condutibilidade ($r_{cond} = e/k$).

A noção de resistência térmica facilita o cálculo da transferência de calor quando esta se dá através de um conjunto de materiais diferentes. Por exemplo, para duas placas (1 e 2) colocadas em série pode calcular-se o fluxo global somando as resistências individuais de cada placa:

$$R_{série} = \frac{e_1}{k_1 A_s} + \frac{e_2}{k_2 A_s} \quad (1.10)$$

Também se podem associar resistências em paralelo, mas nesse caso com a suposição de que os fluxos nos 2 materiais têm apenas a direção x , ou seja, não existe fluxo entre os 2. Tal é razoável nalguns casos, mas não sempre, como se verá no problema P1.1. Quando 2 resistências se associam em paralelo, a resistência global é

$$\frac{1}{R_{paralelo}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{k_1 A_{s1}}{e_1} + \frac{k_2 A_{s2}}{e_2} \quad (1.11)$$

A Figura 1.3 representa esquematicamente as associações de resistências referidas.

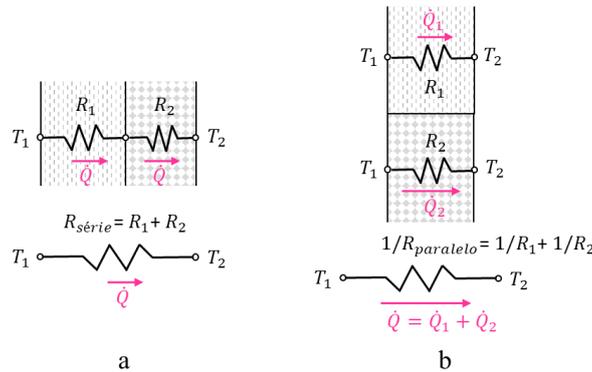


Figura 1.3 – Associação de 2 resistências térmicas de condução em série e em paralelo e respetivas potências transferidas: (a) série; (b) paralelo.

As equações (1.10) e (1.11) são generalizáveis a 3 ou mais materiais/corpos. Também se podem adicionar resistências correspondentes à convecção superficial nas fronteiras. Sendo a resistência igual à diferença de temperatura a dividir pela potência transferida, nesse caso cada resistência é o inverso do produto do coeficiente de convecção pela área superficial, ou seja:

$$R_{conv} = \frac{1}{h_{conv} A_s} \quad (1.12)$$

Note-se que a noção de resistência térmica não é aplicável quando há fontes de calor internas, uma vez que nesse caso o fluxo de calor varia ao longo da espessura do material (ao longo de x).

1.1.2 Condução radial cilíndrica (sem e com fontes internas de calor)

Em muitos casos práticos intervém a geometria cilíndrica, para a qual se devem usar as coordenadas cilíndricas – equação (1.3). Uma simplificação frequente consiste em admitir que a temperatura só varia ao longo do raio, pelo que o calor tem a direção radial, desprezando assim a variação circunferencial (θ) e ao longo do eixo (z). Tratando-se de regime permanente e intervindo apenas a coordenada radial, a equação (1.3) reduz-se a

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (1.13)$$

e no caso de não existirem fontes de calor internas, a:

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (1.14)$$

A equação (1.13) pode aplicar-se a cilindros cheios ou ocos (tubos) com geração de calor interna. No entanto, a equação (1.14) só pode aplicar-se a cilindros ocos ou tubos, uma vez que nos cilindros cheios existe apenas uma superfície em contacto com o exterior (correspondente ao raio exterior), e trocando essa superfície calor (recebendo ou perdendo), não há mais nenhuma superfície para equilibrar as trocas de modo a manter a temperatura constante no tempo (regime permanente).

A distribuição de temperatura radial pode obter-se integrando as equações (1.13) ou (1.14). Mais uma vez, a solução para cada caso específico depende das condições fronteira existentes, apresentando as referências [1, 2] soluções para alguns casos típicos. Algumas serão vistas na secção dedicada aos problemas práticos (1.1.6). No caso da condução radial em tubos sem fontes de calor internas – equação (1.14) – obtém-se da integração, impondo as temperaturas T_1 e T_2 nas superfícies interior (r_{int}) e exterior (r_{ext}) do tubo, a solução:

$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_{int}/r_{ext})} \ln\left(\frac{r}{r_{ext}}\right) + T_2 \quad (1.15)$$

que traduz uma variação logarítmica (ou exponencial) da temperatura com o raio. Através desta pode obter-se a potência que atravessa radialmente a parede cilíndrica:

$$\dot{Q} = \frac{2\pi kL}{\ln(r_{ext}/r_{int})} (T_1 - T_2) \quad (1.16)$$

em que L é o comprimento do tubo ao longo do seu eixo. Tal como para a placa, pode definir-se uma resistência de condução, igual à diferença de temperatura dividida pela potência, vindo

$$R_{cond} = \frac{\ln(r_{ext}/r_{int})}{2\pi kL} \quad (1.17)$$

expressão que mostra que a resistência aumenta com a espessura da parede do tubo, embora não linearmente. Note-se que o fluxo de calor não é constante ao longo do raio: a potência calorífica é constante, mas como a secção de passagem de calor aumenta com o raio, o fluxo vai diminuindo do interior para o exterior.

Tal como para a placa plana, é possível em tubos associar resistências de materiais colocados em série, usando a equação (1.17) para calcular cada uma das resistências. A esse propósito, é vulgar utilizar um tubo de isolante térmico (manga isoladora) no exterior de tubos metálicos,

com o objetivo de reduzir a potência calorífica transferida para o exterior, como em tubagens de água quente ou vapor. No entanto, como veremos, em certas condições podemos obter um efeito indesejado. Para tal, consideremos então um tubo rodeado por outro, com um contacto perfeito entre ambos. No interior do tubo mais pequeno existe um fluido a temperatura mais elevada que a temperatura exterior ao tubo maior, conhecendo-se os coeficientes de convecção interior e exterior. Pode escrever-se então a seguinte resistência global

$$R_{global} = \frac{1}{h_{conv,int}\pi D_{int}L} + \frac{\ln(D_1/D_{int})}{2\pi k_t L} + \frac{\ln(D_{ext}/D_1)}{2\pi k_{is}L} + \frac{1}{h_{conv,ext}\pi D_{ext}L} \quad (1.18)$$

sendo D_1 o diâmetro intermédio. Vamos admitir que se varia a espessura do tubo maior, constituído normalmente por material isolante, ou seja, o diâmetro exterior do isolante (D_{ext}). Esse diâmetro intervém na resistência de condução do isolante, que aumenta com o aumento da espessura, e na resistência de convecção exterior, que diminui com o aumento de D_{ext} por haver uma maior área exterior de transferência. Assim, existem dois efeitos opostos. Para melhor analisar o efeito global pode calcular-se a derivada da R_{global} em ordem a D_{ext} . Verifica-se que existe um mínimo para a resistência global, que corresponde a um máximo para o valor da potência transferida. Tal acontece para

$$D_{cr} = \frac{2k_{is}}{h_{conv,ext}} \quad \text{ou} \quad r_{cr} = \frac{k_{is}}{h_{conv,ext}} \quad (1.19)$$

designados por diâmetro e raio crítico de isolamento.

A Figura 1.4 mostra a variação do raio crítico quando se considera um valor típico para k_{is} , e varia o coeficiente de convecção exterior. Para este foi considerado um intervalo entre 5 e 100 $W/m^2\text{C}$, valores que correspondem à existência de convecção natural ou forçada para o ar, no caso máximo a velocidades elevadas.

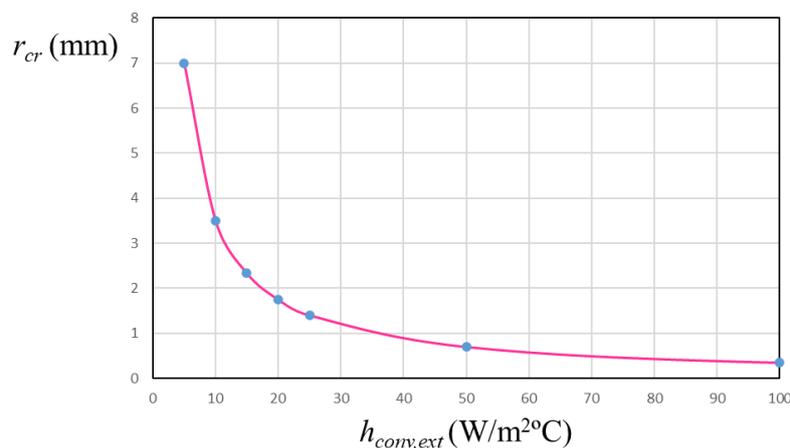


Figura 1.4 – Variação do raio crítico de isolamento com o coeficiente de convecção exterior, para um cilindro/tubo e para $k_{is}=0,035 W/m^2\text{C}$.

Note-se que o valor do raio crítico é maior para coeficientes baixos (caso da convecção natural), mas é sempre bastante baixo (< 8 mm) e não depende da geometria (diâmetro) do tubo interior. Tal quer dizer que não ocorre um aumento da potência transferida (até ao valor crítico máximo) se o tubo interior tiver um raio (r_1) igual ou superior ao crítico, pelo que nesse caso compensa sempre usar isolante.

Também tem interesse analisar o caso de um cilindro cheio (não oco) quando percorrido por corrente elétrica (caso por exemplo de um cabo elétrico revestido por um isolante). Nesta situação é a potência calorífica dissipada que é imposta, igual à gerada no interior, e não a temperatura interior. Nesse caso só fazem sentido as duas últimas parcelas de (1.18) ao calcular a resistência global, o que conduz ao mesmo resultado para o raio crítico, uma vez que sendo constantes as primeiras 2 parcelas de (1.18) o mínimo da resistência global é o mesmo. Só que neste caso, sendo a potência total constante (igual à gerada no interior do cilindro/cabo), esse mínimo corresponde a uma diferença de temperatura mínima entre a superfície (T_1 , com raio r_1) e o exterior (T_{ext}). Qualquer outro valor do raio r_{ext} conduzirá a temperaturas interiores mais elevadas. Saliente-se que no caso de um cabo elétrico já é típico haver um raio mais pequeno que num tubo, pelo que a espessura do isolante poderá ser calculada de modo a minimizar a temperatura do cabo.

1.1.3 Condução radial esférica (sem e com fontes internas de calor)

No caso da condução radial esférica devem usar-se as coordenadas esféricas – equação (1.4). Admite-se então que a temperatura só varia ao longo do raio, pelo que o calor tem a direção radial, desprezando assim a variação com os ângulos θ e φ . Em regime permanente a equação (1.4) reduz-se a

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0 \quad (1.20)$$

e no caso de não existirem fontes de calor internas, a:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (1.21)$$

De modo equivalente ao discutido para os cilindros, a equação (1.20) pode aplicar-se a esferas cheias ou ocas com geração de calor interna, mas a equação (1.21) só pode aplicar-se a esferas ocas (ou cascas esféricas), de modo a assegurar a existência de regime permanente.

Podem também obter-se soluções típicas para a integração das equações (1.20) ou (1.21), dependendo das condições fronteira existentes [1, 2]. Algumas serão vistas na secção dedicada aos problemas práticos (1.1.6). No caso da condução radial em esferas ocas sem fontes de calor internas – equação (1.21) – obtém-se da integração, impondo as temperaturas T_1 e T_2 nas superfícies interior (r_{int}) e exterior (r_{ext}) da esfera/casca, a solução:

$$T(r) = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{1 - r_{int}/r}{1 - r_{int}/r_{ext}} \quad (1.22)$$

Através desta pode obter-se a potência que atravessa radialmente a parede esférica:

$$\dot{Q} = \frac{4\pi k}{1/r_{int} - 1/r_{ext}} (T_1 - T_2) \quad (1.23)$$

Pode também definir-se uma resistência de condução esférica, igual à diferença de temperatura dividida pela potência, vindo

$$R_{cond} = \frac{1/r_{int} - 1/r_{ext}}{4\pi k} \quad (1.24)$$

Tal como no cilindro, sendo a potência calorífica constante, como a secção de condução de calor aumenta com o raio, o fluxo vai diminuindo do interior para o exterior.

Também de forma semelhante ao cilindro, é possível calcular um raio crítico de isolamento, correspondente à colocação de um isolante no exterior de um cilindro ou casca esférica, e sendo conhecido o coeficiente de convecção exterior (constante). Ele vem dado por

$$r_{cr} = \frac{2 k_{is}}{h_{conv,ext}} \quad (1.25)$$

Note-se que o valor obtido pela equação (1.25) é exatamente o dobro do raio crítico para um cilindro/tubo, para a mesma condutibilidade e coeficiente de convecção – comparar com a equação (1.19). Por isso, é possível ocorrer a situação crítica com esferas de maior raio do que os dos cilindros representados na Figura 1.4.

1.1.4 Condução monodimensional com convecção superficial (como em alhetas)

Como referido a propósito da Figura 1.2(c), num corpo alongado na direção x , em comparação com as dimensões da sua secção (perpendicular a x), pode admitir-se que a condução é monodimensional. Mas nesse caso, para calcular a evolução de temperatura ao longo de x torna-se necessário contabilizar as trocas de calor na superfície exterior da secção. No caso mais simples essas trocas dão-se por convecção para o fluido situado junto à superfície exterior, considerando-se o respetivo coeficiente de convecção constante ao longo de x .

Esta situação ocorre frequentemente na prática em alhetas. As alhetas são extensões de uma superfície, quer do mesmo material, quer de material diferente com uma boa ligação à superfície original. O seu objetivo é o de aumentar a potência calorífica transferida pelo aumento da área, muitas vezes para compensar um baixo coeficiente de convecção (como no caso de ar a baixa velocidade junto à superfície). Há aplicações diversas, com diferentes geometrias, como as ilustradas na Figura 1.5.

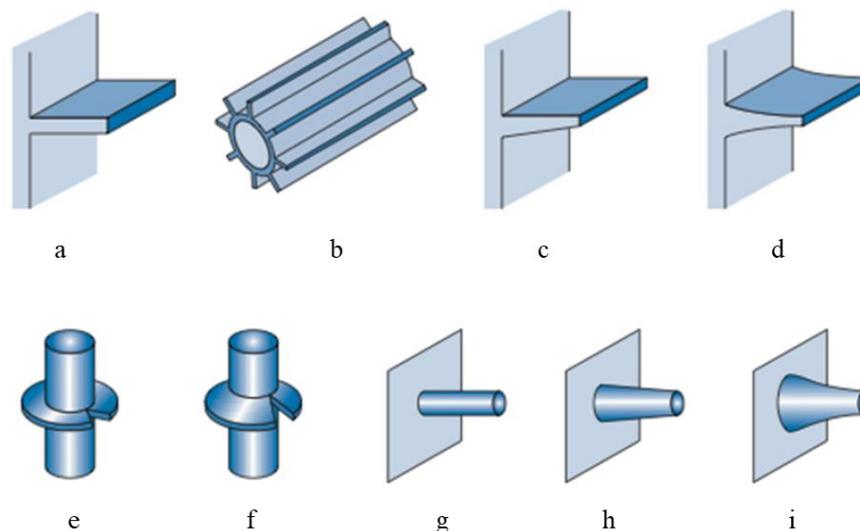


Figura 1.5 – Diferentes geometrias de alhetas: (a) – retangular de secção constante em superfície plana; (b) – retangular de secção constante em tubo; (c, d) – retangulares de secção variável; (e) – circular de espessura constante; (f) – circular de espessura variável; (g) – pino de secção constante; (h, i) – pinos de secção variável.

A distribuição de temperatura na condução 1D (ao longo de x) quando há convecção superficial, e quando a secção de condução é constante, como numa alheta retangular de secção constante, pode obter-se considerando o balanço térmico de um elemento de volume infinitesimal, como representado na Figura 1.6.

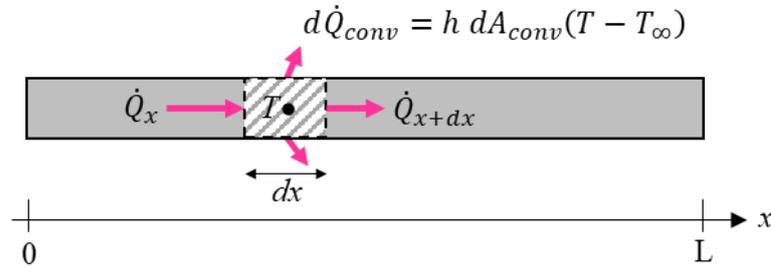


Figura 1.6 – Representação do balanço de um elemento de volume com condução e convecção.

Em regime permanente a potência que entra no elemento é igual à que sai – por condução para o elemento à direita e por convecção à superfície. Como os fluxos de condução dependem do gradiente de temperatura, o balanço resulta em

$$k \frac{d}{dx} \left(A_s \frac{dT}{dx} \right) = h dA_{conv} (T - T_\infty) \quad (1.26)$$

Sendo a secção constante, e a área de convecção elementar igual ao perímetro da secção P vezes o comprimento do elemento (dx), vem

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{h P}{k A_s} (T - T_\infty) = 0 \quad (1.27a)$$

ou

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} - m^2 \theta = 0 \quad (1.27b)$$

com $\theta = T - T_\infty$ e $m = \sqrt{\frac{h P}{k A_s}}$.

Esta equação pode ser resolvida analiticamente, dependendo o resultado das condições nas fronteiras ($x=0$ e $x=L$). É usual considerar uma condição de temperatura em $x=0$, secção que no caso de uma alheta é designada por base da alheta. Quanto à extremidade ($x=L$) – secção designada por topo numa alheta – diferentes condições se podem considerar: alheta com convecção no topo, alheta sem convecção no topo (ou topo isolado), alheta com temperatura imposta no topo, e alheta muito longa ou infinita (atingindo no topo a temperatura exterior).

A solução mais simples corresponde à alheta muito longa (ou corpo muito longo), para a qual

$$\theta = \theta_b e^{-x} \quad (1.28)$$

$$\dot{Q} = \theta_b \sqrt{h P k A_s} \quad (1.29)$$

sendo θ_b a diferença entre a temperatura da base e a exterior, e \dot{Q} a potência dissipada.

A alheta sem convecção no topo é uma hipótese que também é razoável quando existir convecção, uma vez que a área de transferência do topo é normalmente desprezável face à área de convecção (área superficial), devido à reduzida espessura típica.

Para este caso a solução corresponde a

$$\theta = \theta_b \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)} \quad (1.30)$$

$$\dot{Q} = \theta_b \sqrt{hPkA_s} \tanh(mL) \quad (1.31)$$

sendo θ_b a diferença entre a temperatura da base e a exterior, e \dot{Q} a potência dissipada.

Para a alheta com transferência no topo, sendo o coeficiente de transferência o mesmo, a temperatura e potência podem obter-se com

$$\theta = \theta_b \frac{\cosh[m(L-x)] + (h/mk) \sinh[m(L-x)]}{\cosh(mL) + (h/mk) \sinh(mL)} \quad (1.32)$$

$$\dot{Q} = \theta_b \sqrt{hPkA_s} \frac{\sinh(mL) + (h/mk) \cosh(mL)}{\cosh(mL) + (h/mk) \sinh(mL)} \quad (1.33)$$

Numa alheta é conveniente definir uma grandeza designada por rendimento da alheta. Este rendimento traduz a maior ou menor aproximação à situação definida como ideal, que consiste em toda a alheta se encontrar à temperatura da base. Ou seja:

$$\eta_{alh} = \frac{\dot{Q}}{hA_{conv}\theta_b} \quad (1.34)$$

Para a alheta retangular de secção constante sem trocas no topo vem

$$\eta_{alh} = \frac{\theta_b \sqrt{hPkA_s} \tanh(mL)}{\theta_b hPL} = \frac{\tanh(mL)}{mL} \quad (1.35)$$

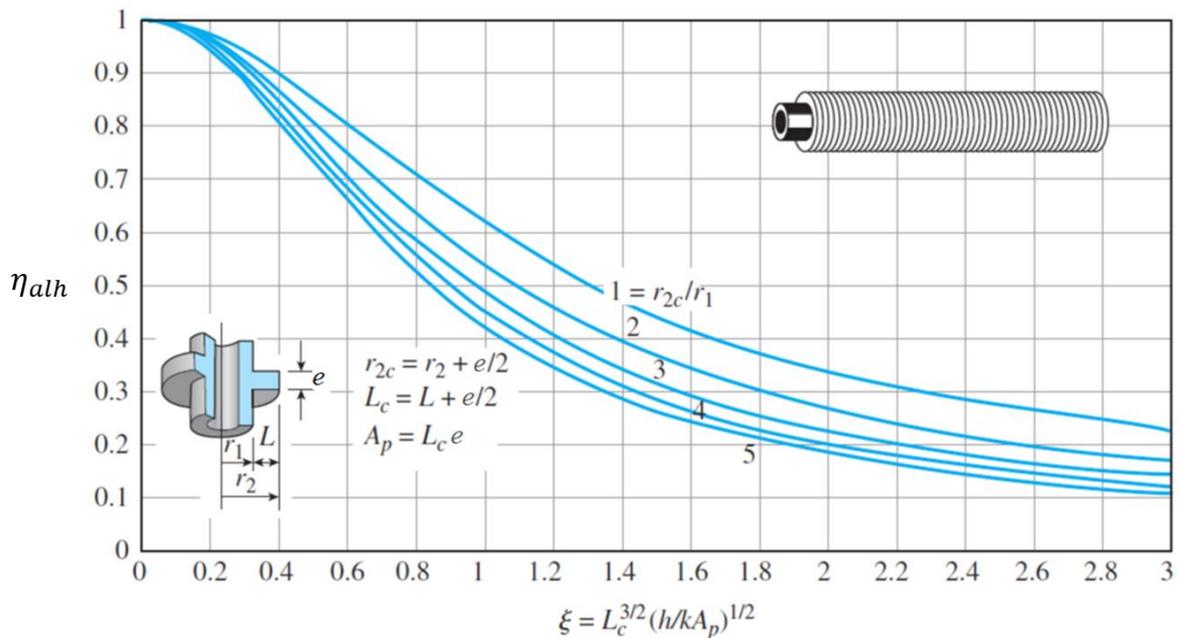


Figura 1.7 – Rendimento de alhetas circulares de espessura constante; adaptado de [2].

Nas alhetas de secção variável as soluções analíticas são mais complexas, exigindo o recurso a funções de Bessel, [1, 2]. Nas alhetas circulares, mesmo com espessura constante a área de condução (secção) aumenta ao aumentar o raio. Assim, o método mais expedito para calcular a potência que atravessa a alheta consiste em utilizar informação do rendimento da alheta. Essa informação está disponível na forma gráfica, [1, 2], e foi obtida a partir das soluções analíticas. A Figura 1.7 apresenta o rendimento para alhetas circulares de espessura constante. Note-se que ela contabiliza também o calor trocado no topo da alheta, através da correção feita ao seu comprimento (L_c).

Quando se utilizam alhetas é usual colocar várias, com uma grande proximidade entre si, de modo a conseguir um incremento significativo da área de transferência. Ao contabilizar a potência total transferida é necessário entrar em conta com a área superficial das alhetas e com a área superficial que não contém alhetas (não alhetada). Admitindo que a base das alhetas e a superfície exterior não alhetada do corpo se encontram à mesma temperatura, podemos considerar que há 2 resistências em paralelo: uma na área não alhetada e outra nas alhetas. A resistência das alhetas pode expressar-se com o rendimento, como

$$R_{alh} = \frac{\theta_b}{\eta_{alh} h A_{conv} \theta_b} = \frac{1}{\eta_{alh} h A_{alh}} \quad (1.36)$$

Quanto à potência total transferida (zona com e sem alhetas) pode escrever-se

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{alh} + \dot{Q}_{A_s/alh} = (\eta_{alh} h A_{alh} + h A_{s/alh}) \theta_b = \eta_{sup} h A_{tot} \theta_b \quad (1.37)$$

admitindo o mesmo coeficiente de convecção nas 2 zonas, e introduzindo uma eficiência das 2 zonas η_{sup} (área total). Esta eficiência superficial é uma média pesada entre η_{alh} (área das alhetas) e 1 (eficiência da área não alhetada), sendo os pesos proporcionais às respetivas áreas. Assim, é sempre superior à eficiência das alhetas.

1.1.5 Condução bidimensional em placa e cilindro (métodos numéricos)

A equação geral da condução – equações (1.2) a (1.4), consoante as coordenadas usadas – não tem uma solução analítica geral, mesmo em regime permanente, em particular nos casos 2D e 3D. No caso do regime permanente e 2D existem algumas soluções analíticas, para condições fronteira muito simples, mas ainda assim recorrendo ao uso de séries.

Podem obter-se soluções aproximadas para todas as situações, incluindo aquelas em que não há soluções analíticas, usando métodos numéricos. Esses métodos permitem tratar casos 2D e 3D, e também 1D, por exemplo quando há coeficientes de convecção/transferência variáveis espacialmente ou no tempo. Podem também tratar casos com ou sem fontes de calor internas.

Os métodos numéricos são usualmente divididos em 3 grupos: método das diferenças finitas, método dos volumes finitos, e método dos elementos finitos. O método das diferenças finitas recorre à transformação das derivadas em diferenças (finitas), sendo os outros 2 grupos mais baseados em conceitos físicos, como balanços de energia. Apresentam-se de seguida alguns dos princípios do método dos volumes finitos e do método dos elementos finitos para aplicações à condução 2D em regime permanente.

No método dos volumes finitos a definição dos elementos de volume a usar depende da geometria do problema. Para geometrias adequadas a coordenadas cartesianas (retangulares em 2D) são usados elementos retangulares, e para coordenadas cilíndricas elementos encurvados

(porções de setores circulares). A Figura 1.8 representa os elementos a usar em cada caso, situados em torno de um ponto genérico do material (P).

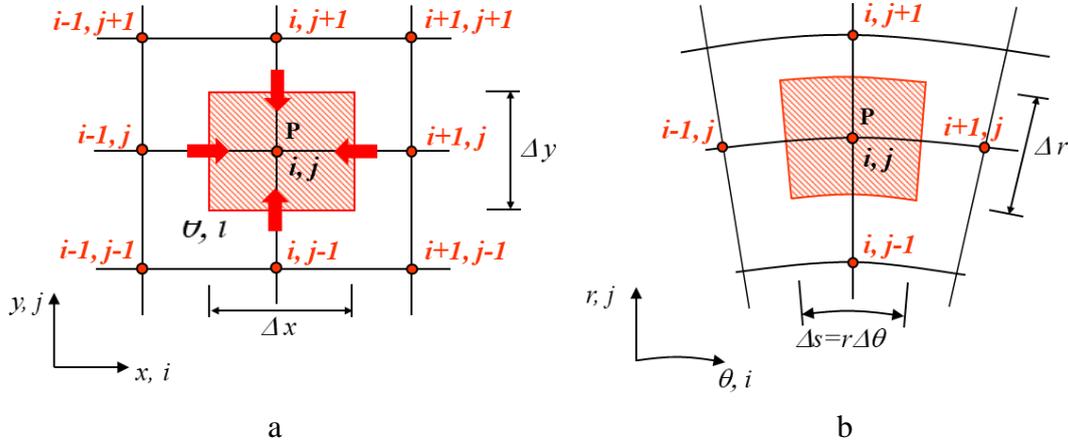


Figura 1.8 – Elementos de volume no método dos volumes finitos: (a) geometria retangular; (b) geometria circular.

No método dos volumes finitos é feito um balanço energético de cada um dos volumes que compõem o material. Cada elemento de volume é considerado a uma temperatura uniforme, e troca os 4 fluxos correspondentes às 4 fronteiras representadas na Figura 1.8, escritos em função das temperaturas dos elementos vizinhos. Por exemplo, a equação de balanço para o elemento (i, j) da Figura 1.8(a), considerando a possibilidade de haver fontes internas será (em regime permanente, com condutibilidade constante, e considerando Δx e Δy constantes)

$$\begin{aligned} & \frac{k}{\Delta x} \Delta y (T_{i-1,j} - T_{i,j}) + \frac{k}{\Delta x} \Delta y (T_{i+1,j} - T_{i,j}) + \frac{k}{\Delta y} \Delta x (T_{i,j-1} - T_{i,j}) + \\ & + \frac{k}{\Delta y} \Delta x (T_{i,j+1} - T_{i,j}) + \dot{g} \Delta x \Delta y = 0 \end{aligned} \quad (1.38)$$

Construída uma malha de nodos (pontos) e elementos de volume, existirá uma equação de balanço análoga a (1.38) para cada nodo/elemento. O sistema de equações pode ser resolvido de forma a calcular as temperaturas em todos os nodos. As temperaturas em pontos intermédios (que não os nodos) podem estimar-se por interpolação. O método é tanto mais preciso quanto menores as dimensões Δx e Δy , ou seja, quanto mais elementos forem usados. Para a obtenção de uma boa solução é em muitos casos necessário resolver um sistema de muitas equações, pelo que se requer o uso de meios computacionais. A identificação de zonas simétricas de distribuição de temperatura é importante para reduzir o esforço de cálculo.

Os elementos e nodos situados nas fronteiras do domínio em estudo merecem atenção particular. Como recomendado em [3], devem colocar-se nodos nas fronteiras do domínio a estudar, como representado na Figura 1.9(a). Nesse caso, tratando-se de uma fronteira com convecção (em 2 lados, podendo as temperaturas e coeficientes ser diferentes), a equação para o elemento fronteira será

$$\begin{aligned} & \frac{k}{\Delta x} \frac{\Delta y}{2} (T_{i+1,j} - T_{i,j}) + \frac{k}{\Delta y} \frac{\Delta x}{2} (T_{i,j-1} - T_{i,j}) + \\ & + h_1 \frac{\Delta y}{2} (T_{ext,1} - T_{i,j}) + h_2 \frac{\Delta x}{2} (T_{ext,2} - T_{i,j}) + \dot{g} \frac{\Delta x \Delta y}{2} = 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

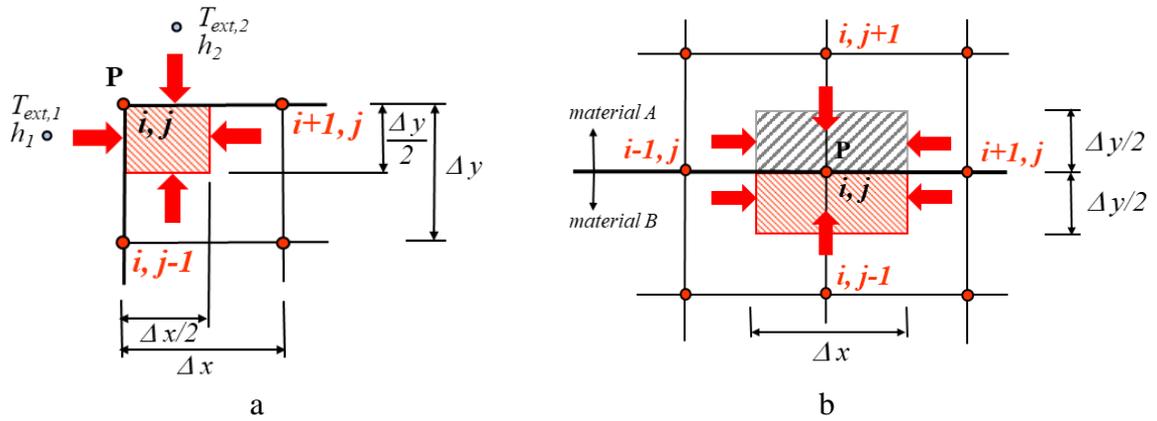


Figura 1.9 – Situações especiais no método dos volumes finitos: (a) elemento fronteira (canto); (b) elemento contendo materiais diferentes.

Outro caso especial ocorre na fronteira entre 2 materiais diferentes. Nessa altura pode usar-se um único elemento de volume composto pelos 2 materiais – ver Figura 1.9(b). Nesse caso a equação a usar será

$$\frac{k_A \Delta y}{\Delta x} \frac{\Delta y}{2} (T_{i-1,j} - T_{i,j}) + \frac{k_B \Delta y}{\Delta x} \frac{\Delta y}{2} (T_{i-1,j} - T_{i,j}) + \frac{k_A \Delta y}{\Delta x} \frac{\Delta y}{2} (T_{i+1,j} - T_{i,j}) + \frac{k_B \Delta y}{\Delta x} \frac{\Delta y}{2} (T_{i+1,j} - T_{i,j}) + \frac{k_A \Delta x}{\Delta y} (T_{i,j+1} - T_{i,j}) + \frac{k_B \Delta x}{\Delta y} (T_{i,j+1} - T_{i,j}) + \dot{q}_A \Delta x \frac{\Delta y}{2} + \dot{q}_B \Delta x \frac{\Delta y}{2} = 0 \quad (1.40)$$

Quanto ao método dos elementos finitos, ele não assenta na utilização de elementos baseados nas coordenadas cartesianas ou cilíndricas vistas. Ele usa um conjunto de nodos e elementos triangulares (em 2D) que se distribuem pelo domínio a estudar. As fronteiras do domínio são aproximadas a segmentos de reta. São elementos muito mais fáceis de adaptar a geometrias encurvadas (não retangulares nem circunferenciais) – Figura 1.10.

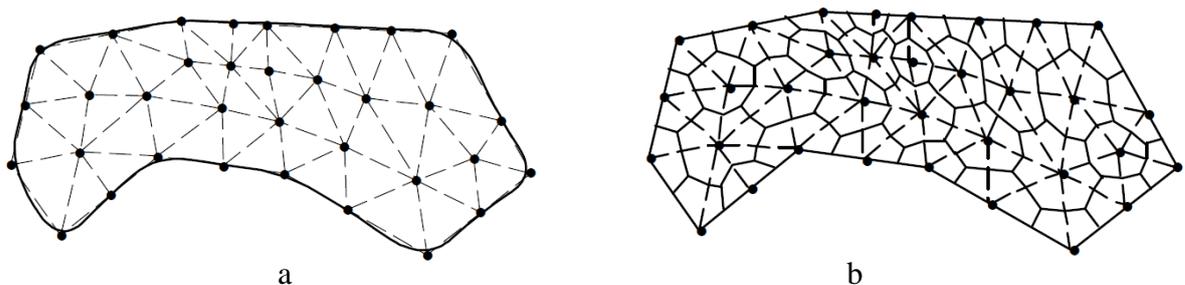


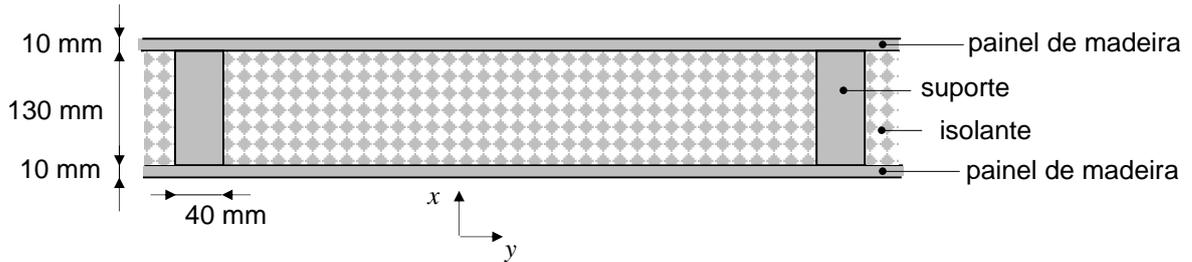
Figura 1.10 – Elementos finitos: (a) elementos triangulares e nodos; (b) sistemas nodais (fronteiras fechadas).

Nos elementos da Figura 1.10(a) a temperatura é suposta variar linearmente entre os 3 vértices (nodos) de cada elemento. O problema consiste em calcular a temperatura em cada nodo. Cada elemento triangular tem 3 graus de liberdade, pois são necessários 3 valores nodais para calcular a temperatura em qualquer ponto no interior do elemento triangular. Variando a temperatura linearmente em cada lado dos triângulos definidos, as isotérmicas são perpendiculares a esses lados, podendo representar-se elementos de volume com 6 isotérmicas em torno de cada nodo interior – os sistemas nodais da Figura 1.10(b). É feito um balanço energético para cada um dos sistemas nodais, expressando os fluxos de calor através das suas fronteiras. Para os detalhes matemáticos pode consultar-se a referência [4].

1.1.6 Problemas práticos resolvidos (P1.1 a P1.13)

Na resolução de problemas de transferência de calor, é fundamental identificar as hipóteses físicas subjacentes ao modelo de cálculo que se vai construir. É também importante fazer uma representação esquemática do problema a resolver, constituída por um desenho da geometria, dos fluxos de calor, ou das resistências térmicas envolvidas. Esta representação é um auxiliar de memória das condições impostas no problema, e permite resumir os dados e grandezas conhecidas e desconhecidas. Aplica-se esta metodologia nos problemas seguintes.

P1.1

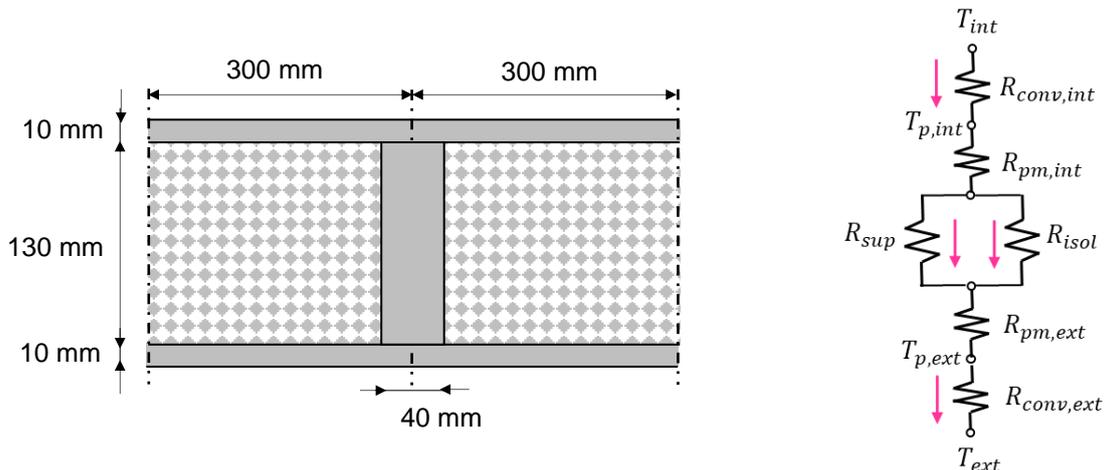


A figura acima representa (em corte num plano horizontal) uma parede exterior de um edifício, cujo espaço interior é mantido a 20°C, estando o ar exterior à temperatura constante de 0°C. O coeficiente de convecção interior é de 5 W/m²°C, e o coeficiente de transferência de calor na face exterior da parede é de 20 W/m²°C.

A parede é composta por painéis de madeira (exterior e interior, com $k=0,16$ W/m°C), separados por placas de suporte também em madeira (mesmo $k=0,16$ W/m°C), e preenchidos por material isolante térmico (fibra de vidro, com $k=0,038$ W/m°C). Sendo a largura da parede de 6 m, com 10 placas de suporte igualmente espaçadas, e a sua altura (na direção perpendicular ao plano da figura) de 2,5 m, calcule a potência calorífica que a atravessa.

Resolução e discussão

Trata-se de um problema em que as temperaturas se mantêm constantes no tempo (regime permanente). Admitindo que não há variação de temperatura na vertical, pela uniformidade da geometria e dos materiais nessa direção, as temperaturas no conjunto (parede) variam nas direções x e y (condução bidimensional permanente). No entanto, é possível obter soluções aproximadas com base na formulação monodimensional, e nomeadamente recorrendo à noção de resistências térmicas. Assim, consideremos o seguinte esquema de resistências entre o interior e o exterior, para um elemento típico da parede (em toda a largura existem 10 elementos semelhantes):



O esquema de resistências representado admite que a temperatura dos painéis de madeira não varia ao longo da largura da parede (é igual no mesmo valor de x , para qualquer coordenada y). No interior da parede, existindo em paralelo o isolante e o suporte, para o mesmo valor de x a temperatura não é igual nos 2 materiais; no entanto, é feita a simplificação de desprezar o fluxo de calor entre os mesmos, segundo a direção y ; ou seja, os fluxos de calor só têm a direção x . As resistências para cada elemento considerado são:

$$R_{conv,int} = \frac{1}{h_{conv,int}A_{pm}} = \frac{1}{5 \times (0,6 \times 2,5)} = 0,133 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

$$R_{pm,int} = \frac{e_{pm,int}}{k_{pm}A_{pm}} = \frac{0,01}{0,16 \times (0,6 \times 2,5)} = 0,0417 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

$$R_{sup} = \frac{e_{sup}}{k_m A_{sup}} = \frac{0,130}{0,16 \times (0,04 \times 2,5)} = 8,125 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

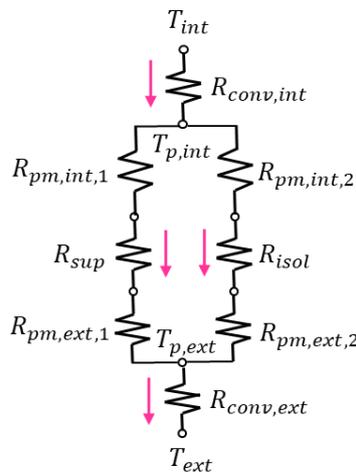
$$R_{isol} = \frac{e_{isol}}{k_{isol}A_{isol}} = \frac{0,130}{0,038 \times (0,56 \times 2,5)} = 2,444 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

$$R_{pm,ext} = \frac{e_{pm,ext}}{k_{pm}A_{pm}} = \frac{0,01}{0,16 \times (0,6 \times 2,5)} = 0,0417 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

$$R_{conv,ext} = \frac{1}{h_{conv,ext}A_{pm}} = \frac{1}{20 \times (0,6 \times 2,5)} = 0,0333 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

Note-se que a resistência do isolante é 3,3 vezes menor que a resistência do suporte: apesar da menor condutibilidade do isolante (cerca de 4 vezes menor), a área (largura) é bastante maior. Assim, a resistência do paralelo vem igual a $1,879 \text{ } ^\circ\text{C/W}$, e a resistência global, somando essa às restantes resistências em série, é igual a $2,129 \text{ } ^\circ\text{C/W}$. A potência calorífica transmitida por cada elemento, do interior para o exterior, igual à diferença de temperatura dividida pela resistência, é de $9,39 \text{ W}$. Havendo 10 elementos na parede, a potência total é de $93,9 \text{ W}$.

No entanto, e ainda com uma aproximação monodimensional (1D) usando resistências térmicas, é também possível usar o esquema seguinte:



Neste esquema, assume-se que a temperatura dos painéis pode variar na direção y , com exceção das faces externas da parede. As resistências parciais (índices 1 e 2) correspondem, respetivamente, às áreas da secção do suporte e da secção do isolante, e são:

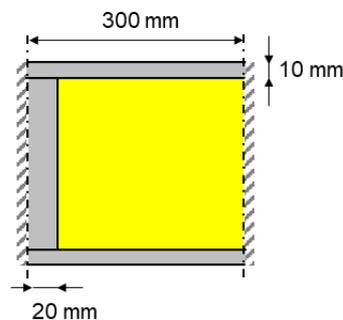
$$R_{pm,int,1} = R_{pm,ext,1} = \frac{e_{pm}}{k_{pm}A_{sup}} = \frac{0,01}{0,16 \times (0,04 \times 2,5)} = 0,625 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

$$R_{pm,int,2} = R_{pm,ext,1} = \frac{e_{pm}}{k_{pm}A_{isol}} = \frac{0,01}{0,16 \times (0,56 \times 2,5)} = 0,0446 \text{ } ^\circ\text{C/W}$$

Para este esquema alternativo a resistência equivalente do paralelo é igual a 1,994 °C/W, e a resistência global é de 2,160 °C/W. Esta conduz a uma potência por elemento de 9,26 W e uma potência total de 92,6 W. Saliente-se a pequena diferença nos resultados: inferior a 2%. Essa diferença tenderá a aumentar em casos em que a diferença de condutibilidades térmicas dos elementos em paralelo se acentue.

Pode ainda considerar-se um esquema de resistências alternativo, admitindo que nas faces exteriores dos painéis de madeira (lado interior e lado exterior da parede) a temperatura também pode variar com y , podendo assumir 2 valores. Tal corresponde a dividir cada uma das resistências de convecção $R_{conv,int}$ e $R_{conv,ext}$ em 2 resistências em paralelo, como feito anteriormente para $R_{pm,int}$ e $R_{pm,ext}$ (divididas em 1 e 2). Com essa abordagem a resistência global do elemento vem igual a 2,191 °C/W, e a potência total a 91,3 W. Este valor é também menos de 2% inferior ao anterior.

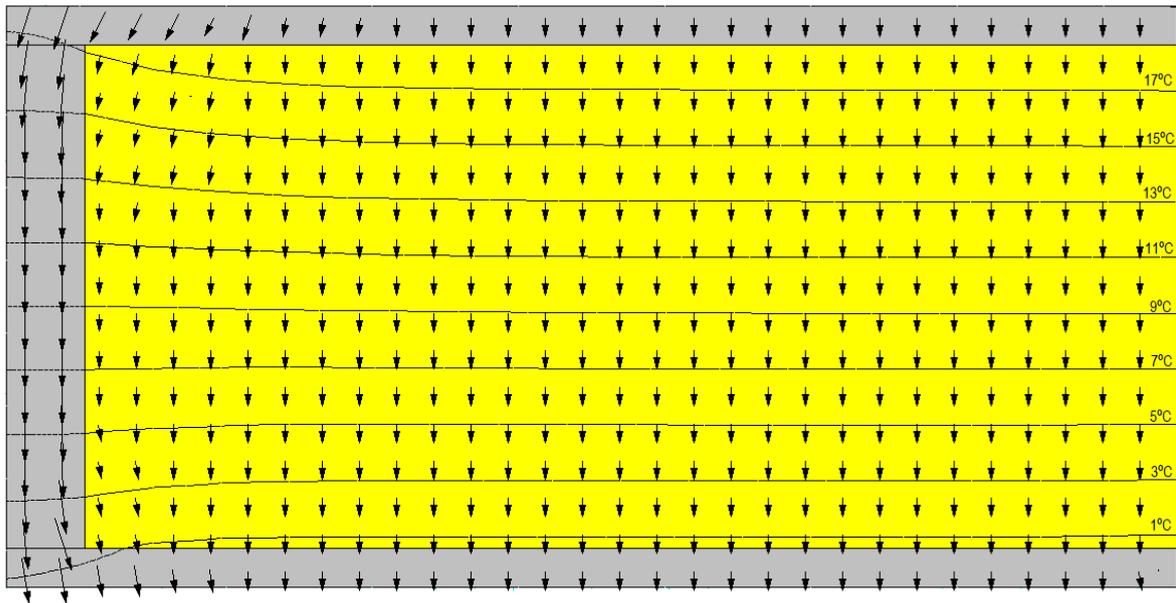
Vamos agora aplicar um método de resolução que contabilize de forma mais adequada a variação bidimensional da temperatura no conjunto (com x e y). Para tal foi aplicado um modelo numérico com o método dos elementos finitos, começando por simplificar a geometria em causa, através da consideração dos vários eixos de simetria identificáveis. A geometria simulada está representada na figura seguinte:



Cada um dos 10 elementos considerados anteriormente foi dividido a meio, considerando o eixo de simetria que passa pelo centro de cada suporte. Tal permite reduzir para metade o número de elementos de volume a utilizar. Foram ainda impostas as seguintes condições fronteira: convecção (coeficiente e temperatura exterior) nas faces exteriores da parede; fluxo de calor igual a zero nos eixos de simetria da figura acima.

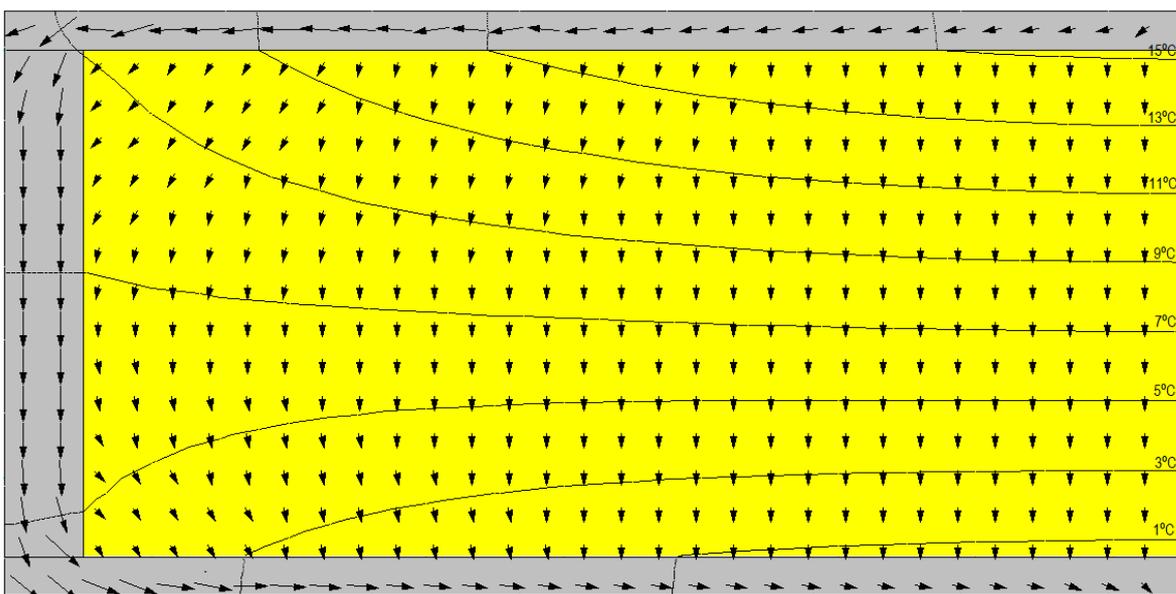
Mesmo assim, na procura de uma maior precisão dos resultados, foram considerados 1073 nodos na malha criada, o que corresponde a resolver um sistema de 1073 equações a 1073 incógnitas. Com recurso a meios computacionais, foram obtidas as temperaturas nos elementos em causa. A figura seguinte mostra a distribuição de temperaturas no conjunto, através da representação das linhas isotérmicas correspondentes às temperaturas de 17°C até 1°C, com um intervalo de 2°C entre linhas. Nota-se que as isotérmicas são praticamente horizontais no material isolante (temperatura praticamente só varia com x), o que não acontece junto ao suporte, em particular nas extremidades, onde a temperatura varia mais acentuadamente com y . A figura representa ainda vetores fluxos de calor em diversos pontos do conjunto. Como se sabe, em cada ponto estes vetores são perpendiculares à isotérmica que passa nesse ponto.

Verifica-se que os fluxos se dão praticamente só na direção x no material isolante, tendo componentes x e y junto ao suporte, sobretudo nas extremidades deste, como resulta da distribuição de temperaturas.

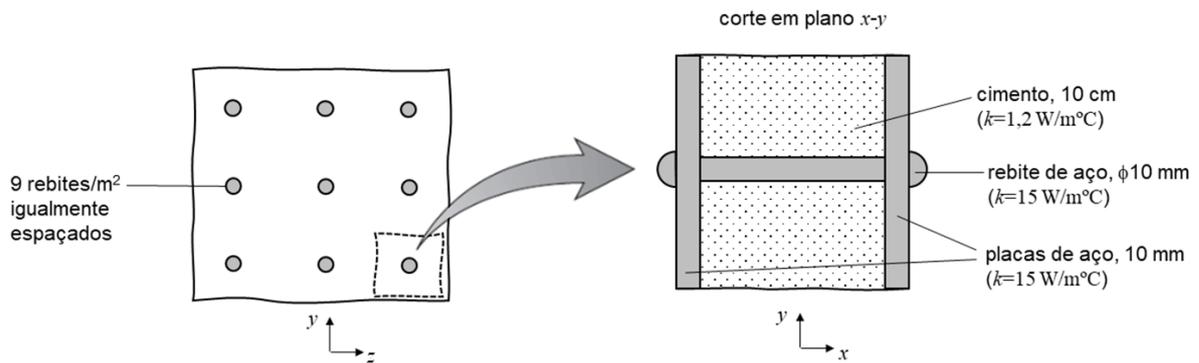


Da soma dos fluxos na fronteira do domínio (fronteira superior ou inferior), e considerando a existência de 20 elementos semelhantes em toda a largura da parede, obtém-se uma potência total transferida de 92,0 W. O valor que mais se aproxima deste com a aproximação monodimensional, foi o calculado com base no segundo esquema de resistências considerado (92,6); no entanto, também o terceiro esquema apresenta uma diferença semelhante (neste caso com um valor inferior, igual a 91,3).

Também se reveste de interesse verificar o que acontece quando o material usado nos painéis externos e suportes se altera, bem como a sua condutibilidade térmica. Usando aço inox em vez de madeira, com uma condutibilidade térmica de 15 W/m°C, que é cerca de 100 vezes superior à considerada para a madeira, e cerca de 400 vezes superior à do material isolante, obtêm-se as isotérmicas e fluxos da figura seguinte.



Note-se que nos painéis de aço os fluxos são praticamente na direção y ; o calor passa quase totalmente pelo aço, concretizando o efeito de “ponte térmica”. A potência total transferida na parede (com 20 elementos como os da figura) será agora de 524,5 W (5,7 vezes maior). Usando as resistências térmicas, e o segundo esquema visto antes, obter-se-iam 761,2 W, pelo que o erro desse método se agrava com o aumento da condutibilidade (e da diferença de condutibilidades). O valor real (ou o mais próximo, usando a aproximação 2D) é bastante menor que o calculado com as resistências 1D, uma vez que como se vê na figura anterior o calor que passa no aço tem um percurso bastante mais longo, tendo de atravessar a largura dos painéis e o comprimento do separador.

P1.2

Uma parede é composta por uma camada de 10 cm de espessura de cimento, colocada entre 2 placas de aço com 10 mm (cada). As placas são unidas ao cimento através de rebites, cujo diâmetro é de 10 mm, existindo 9 rebites/m² de parede. Desprezando o efeito/existência das cabeças dos rebites, calcule o coeficiente global de transferência de calor desta parede.

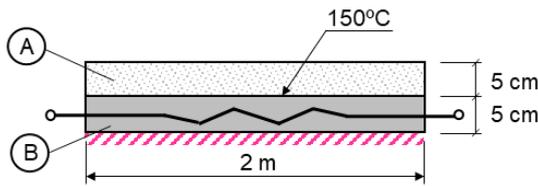
Resolução e discussão

Trata-se de um problema em que a temperatura varia nas 3 direções do espaço (x , y e z). No entanto é possível fazer um cálculo de um valor aproximado, admitindo condução do calor apenas na direção x . Tal hipótese é razoável, apesar da diferença de condutibilidades entre o aço e o cimento (12,5 vezes maior para o aço).

No entanto, e por referência ao problema P1.1, em que se analisou o efeito de diferentes condutibilidades de materiais/resistências transferindo calor em paralelo, estamos bastante longe da situação vista para o caso aço/isolante, em que uma diferença de cerca de 400 vezes criava uma “ponte térmica” que fazia com que o calor não passasse predominantemente ao longo da espessura das placas. Neste caso, para além da muito menor diferença de condutibilidades, os rebites de aço não ocupam toda a altura da parede (como acontecia com os suportes em P1.1), ocupando apenas o espaço que corresponde ao seu diâmetro e densidade de rebites. Assim sendo, é razoável considerar que os fluxos de calor ocorrem unicamente na direção x .

Podem usar-se resistências monodimensionais, como as vistas no esquema 2 do problema 1.1, excluindo as resistências de convecção. A resistência global virá igual a 0,0841 m²°C/W, e o correspondente coeficiente global de transferência de calor será igual a 11,9 W/m²°C. Note-se que ao desprezar a existência dos rebites se obteria um coeficiente global de 11,8 W/m²°C, muito semelhante ao anterior, pois eles têm uma resistência térmica muito inferior à do betão.

P1.3



O tratamento térmico da placa A da figura exige que uma das suas superfícies seja mantida à temperatura de 150°C. Para tal, a placa é aquecida por contacto com uma placa metálica (B),

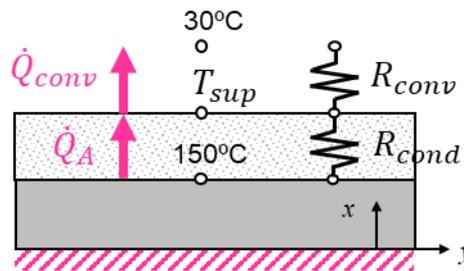
que é atravessada por uma corrente elétrica que gera uma potência calorífica uniforme por unidade de volume. O conjunto tem um comprimento de 2 m e uma largura de 2 m.

A face superior da placa A, que não é percorrida por eletricidade, é arrefecida por ar a 30°C, com um coeficiente de convecção igual a 15 W/m²°C. A face inferior da placa B está perfeitamente isolada.

Desprezando a resistência de contacto entre as placas, calcule a potência a fornecer à placa B. Calcule também a temperatura da face superior da placa A e a da face inferior da placa B. Sabe-se que $k_A=100$ W/m°C e $k_B=15$ W/m°C.

Resolução e discussão

Trata-se de um problema em regime permanente, em que se pode considerar a condução apenas na direção x assinalada na figura abaixo, sendo o início do eixo ($x=0$) colocado na superfície inferior de B. Devido à pequena espessura, serão desprezadas as perdas de calor pelas superfícies laterais das placas (direções y e z).



A figura representa a potência calorífica que atravessa a placa A (constante ao longo de x) e a que passa para o óleo por convecção, assim como as respetivas resistências térmicas. Quanto à placa B não se pode definir uma resistência, uma vez que a potência varia ao longo de x , devido à geração de calor. Mas podemos integrar a equação (1.5)

$$\frac{d^2 T_B}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k_B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT_B}{dx} = -\frac{\dot{q}}{k_B}x + C_1 \quad \Rightarrow \quad T_B = -\frac{\dot{q}}{2k_B}x^2 + C_1x + C_2$$

A constante de integração C_1 é igual a 0, a partir da condição de fluxo zero (ou $dT_B/dx = 0$) em $x=0$ (superfície inferior de B isolada).

Também podemos calcular o fluxo de calor que sai de B, através da diferença de temperatura (150-30) e da associação em série das resistências de A e convecção (por unidade de área), vindo

$$\dot{q}_A = \frac{150-30}{\frac{e_A}{k_A} + \frac{1}{h_{conv}}} = \frac{120}{\frac{0,05}{100} + \frac{1}{15}} = 1787 \text{ W/m}^2$$

que por sua vez é igual ao produto da condutibilidade de B pelo gradiente de temperatura na interface (da lei de Fourier, em $x=0,05$), ou seja

$$\dot{q}_A = \dot{q}_B|_{x=0,05} = -k_B \left. \frac{dT_B}{dx} \right|_{x=0,05} = -k_B \left(-\frac{\dot{g}}{k_B} \times 0,05 + C_1 \right) = \dot{g} \times 0,05 - 0$$

Da igualdade das 2 equações anteriores pode calcular-se $\dot{g} = 3,574 \times 10^4 \text{ W/m}^3$. A potência total a fornecer a B será então, multiplicando pelo volume, de 7148 W.

A temperatura em $x=0,05 \text{ m}$ é conhecida e igual a 150°C . Dessa condição e da equação de T_B (com $C_1=0$) vem

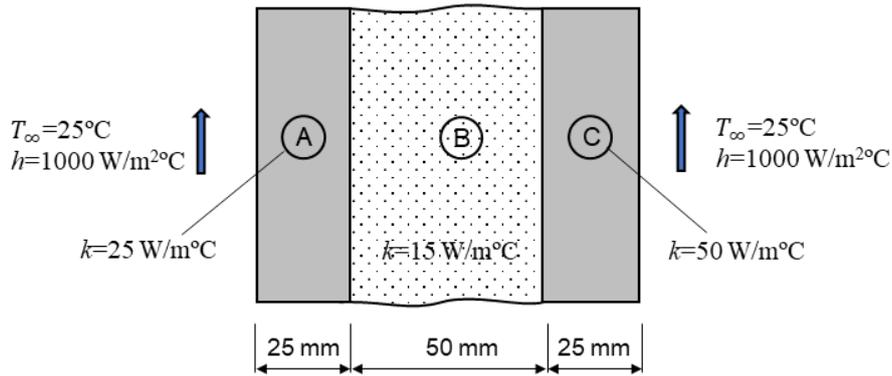
$$150 = -\frac{\dot{g}}{30} \times 0,05^2 + C_2$$

que permite calcular $C_2 = 153,0^\circ\text{C}$, que é igual à temperatura em $x=0$ ($T_B|_{x=0}$).

Quanto a T_{sup} , usando o fluxo (\dot{q}_A) e qualquer das resistências de convecção ou condução, vem igual a $149,1^\circ\text{C}$.

Note-se que se a mesma potência total fosse fornecida à placa B por contacto na sua face inferior, para a mesma condição na placa A, a temperatura máxima de B seria de 156°C , sendo a variação de temperatura em B linear.

P1.4

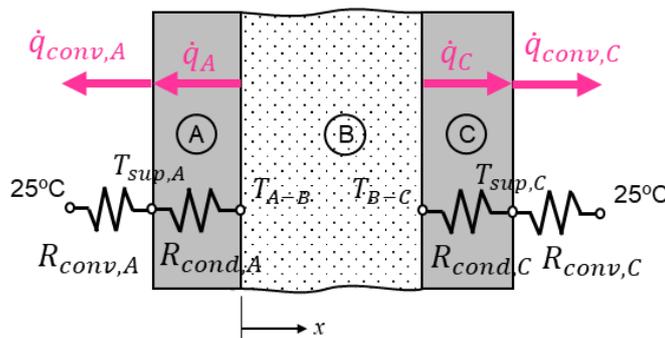


A placa B da figura representa um elemento de combustível nuclear, que é revestido dos 2 lados por placas de aço com condutibilidades diferentes (A e C). O calor gerado no combustível nuclear, com uma taxa de 4 MW/m^3 , é removido em ambas as superfícies exteriores (de A e C) por um escoamento de água a 25°C , com um coeficiente de convecção de $1000 \text{ W/m}^2\text{C}$.

Assumindo resistências de contacto desprezáveis e as restantes condições indicadas na figura, calcule as temperaturas das várias faces/interfaces das placas e a temperatura máxima no conjunto.

Resolução e discussão

Vamos considerar que a transferência de calor se dá em regime permanente, com variação de temperatura apenas ao longo da espessura das placas. A origem do eixo x pode ser colocada em qualquer ponto, não havendo neste caso vantagem, em termos de cálculos, em colocá-la no eixo central do conjunto ABC, uma vez que não existe simetria lateral (devido às diferentes condutibilidades de A e C). Nos cálculos que se seguem considera-se a origem na interface A-B. A figura seguinte representa esquematicamente os fluxos e resistências térmicas em A e C.



Para o combustível (B), havendo geração de calor interna, podemos escrever:

$$\frac{d^2 T_B}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k_B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT_B}{dx} = -\frac{\dot{q}}{k_B} x + C_1 \quad \Rightarrow \quad T_B = -\frac{\dot{q}}{2k_B} x^2 + C_1 x + C_2$$

O fluxo de condução em A pode obter-se pela associação das resistências do lado esquerdo. E será igual ao verificado na interface A-B, ou seja

$$\dot{q}_A = -\frac{T_{A-B} - 25}{\frac{e_A}{k_A} + \frac{1}{h_{conv,A}}} = -\frac{T_{B,x=0} - 25}{\frac{0,025}{25} + \frac{1}{1000}} = -\frac{C_2 - 25}{\frac{0,025}{25} + \frac{1}{1000}} \quad (\text{note-se que o fluxo se dá no sentido negativo de } x)$$

$$\dot{q}_A = \dot{q}_B|_{x=0} = -k_B \left. \frac{dT_B}{dx} \right|_{x=0} = -k_B \left(-\frac{\dot{g}}{k_B} \times 0 + C_1 \right) = -15 C_1$$

O equivalente pode ser feito para o fluxo em C, vindo

$$\dot{q}_C = \frac{T_{B-C}-25}{\frac{e_C}{k_C} + \frac{1}{h_{conv,C}}} = \frac{T_{B,x=0,05}-25}{\frac{0,025}{50} + \frac{1}{1000}} = \frac{\left(-\frac{\dot{g}}{2 \times 15} \times 0,05^2 + C_1 \times 0,05 + C_2 \right) - 25}{\frac{0,025}{50} + \frac{1}{1000}}$$

$$\dot{q}_C = \dot{q}_B|_{x=0,05} = -k_B \left. \frac{dT_B}{dx} \right|_{x=0,05} = -k_B \left(-\frac{\dot{g}}{k_B} \times 0,05 + C_1 \right) = \dot{g} \times 0,05 - 15 C_1$$

Igualando as 2 equações para \dot{q}_A e as 2 para \dot{q}_C , obtém-se um sistema de equações para cálculo de C_1 e C_2 . O seu resultado é $C_1 = 6179$ e $C_2 = 210,4$.

A partir do cálculo das constantes pode então escrever-se

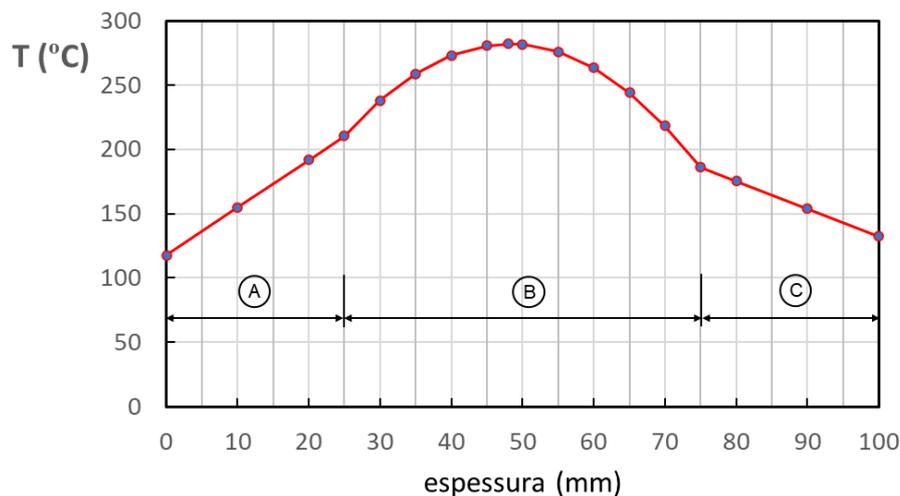
$$T_B = -133333 x^2 + 6179 x + 210,4$$

que permite calcular $T_{A-B} = T_{B,x=0} = 210,4^\circ\text{C}$ e $T_{B-C} = T_{B,x=0,05} = 186,0^\circ\text{C}$.

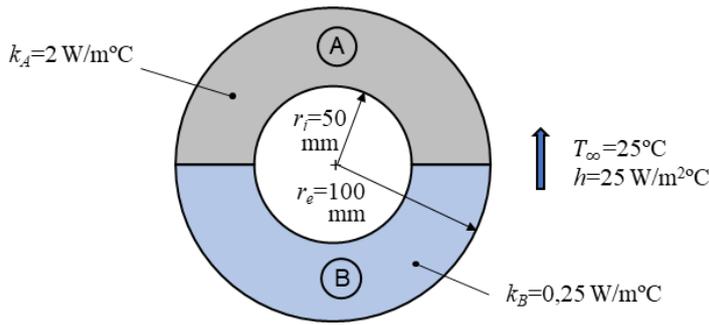
Para calcular $T_{sup,A}$ e $T_{sup,C}$ podem usar-se os fluxos e resistências de convecção. Com $\dot{q}_A = -92700 \text{ W/m}^2$ e $\dot{q}_C = 107333 \text{ W/m}^2$, resultam $T_{sup,A} = 117,7^\circ\text{C}$ e $T_{sup,C} = 132,3^\circ\text{C}$.

Quanto à temperatura máxima, verifica-se no interior do combustível (B), mas não a meio. Pode calcular-se o máximo da função $T_B(x)$, e depois calcular o ponto em que ocorre e o seu valor. Resulta $x = 0,023 \text{ m}$ como ponto de temperatura máxima, com o valor de $282,0^\circ\text{C}$.

O gráfico seguinte mostra o perfil de temperaturas no conjunto ABC.



P1.5



A figura representa a secção de uma tubagem, na qual se encontra vapor a uma temperatura de 200°C. É constituída por um tubo de aço, com espessura desprezável, isolado com 2 materiais diferentes (A e B), ambos com 50 mm de espessura.

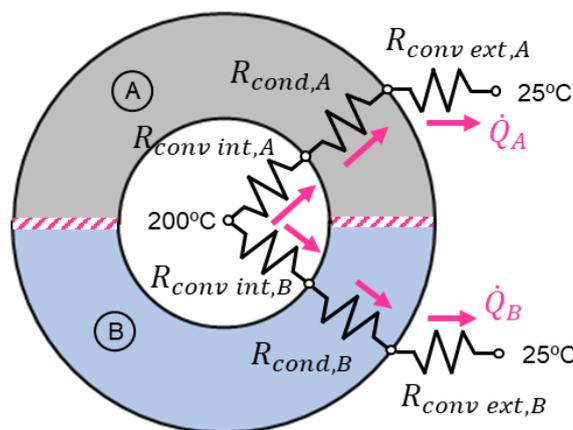
No interior o coeficiente de convecção do vapor é de 100 W/m²°C. No exterior circula ar a 25°C, e o coeficiente de transferência para o exterior é igual a 25 W/m²°C.

Admitindo que não passa calor na junção A-B, calcule a potência calorífica perdida pela tubagem, e ainda as temperaturas superficiais de A e B.

Resolução e discussão

Este problema pode ser tratado através da solução vista para condução monodimensional radial (em regime permanente), visto que se admite não passar calor entre A e B, o que faz com que a temperatura não varie circunferencialmente (ângulo θ da Figura 1.1).

Como representa a figura seguinte, temos a possibilidade de considerar 2 conjuntos de resistências em paralelo: no material A e no B (meio tubo cada). Cada conjunto engloba 3 resistências, somando a convecção interior, a condução (A ou B) e a convecção exterior (a condução no tubo de aço é desprezável). Para além das áreas de convecção. As áreas que intervêm nas resistências de convecção correspondem a metade do tubo, e a equação (1.17) para a resistência de condução radial deverá ser adaptada para contabilizar um perímetro de condução que corresponde a π e não 2π . Faremos uma análise por metro de comprimento de tubagem, uma vez que não se conhece esse comprimento, o que não é importante uma vez que se despreza a variação da temperatura e fluxos ao longo do eixo do tubo.



Assim, teremos as seguintes resistências (por metro de comprimento)

$$R_{conv,int,A} = \frac{1}{h_{conv,int}\pi r_{int}} = \frac{1}{100 \times \pi \times 0,050} = 0,0637 \text{ m}^\circ\text{C/W}$$

$$R_{cond,A} = \frac{\ln(r_{ext}/r_{int})}{\pi k_A} = \frac{\ln(100/50)}{\pi \times 2} = 0,110 \text{ m}^\circ\text{C/W}$$

$$R_{conv,ext,A} = \frac{1}{h_{conv,ext}\pi r_{ext}} = \frac{1}{25 \times \pi \times 0,100} = 0,127 \text{ m}^\circ\text{C/W}$$

$$R_{conv,int,B} = \frac{1}{h_{conv,int}\pi r_{int}} = \frac{1}{100 \times \pi \times 0,050} = 0,0637 \text{ m}^\circ\text{C/W}$$

$$R_{cond,B} = \frac{\ln(r_{ext}/r_{int})}{\pi k_B} = \frac{\ln(100/50)}{\pi \times 0,25} = 0,883 \text{ m}^\circ\text{C/W}$$

$$R_{conv,ext,B} = \frac{1}{h_{conv,ext}\pi r_{ext}} = \frac{1}{25 \times \pi \times 0,100} = 0,127 \text{ m}^\circ\text{C/W}$$

As resistências de cada conjunto são: $R_A = 0,301 \text{ m}^\circ\text{C/W}$ e $R_B = 1,074 \text{ m}^\circ\text{C/W}$. Com esses valores obtêm-se as seguintes potências caloríficas: $\dot{Q}_A = 582 \text{ W/m}$ e $\dot{Q}_B = 163 \text{ W/m}$; a potência total perdida é de 745 W/m . Note-se que, sendo a condutibilidade de A 8 vezes superior à de B, a potência transferida através de A é apenas cerca de 3,5 vezes superior à transferida através de B.

Para as temperaturas superficiais teremos:

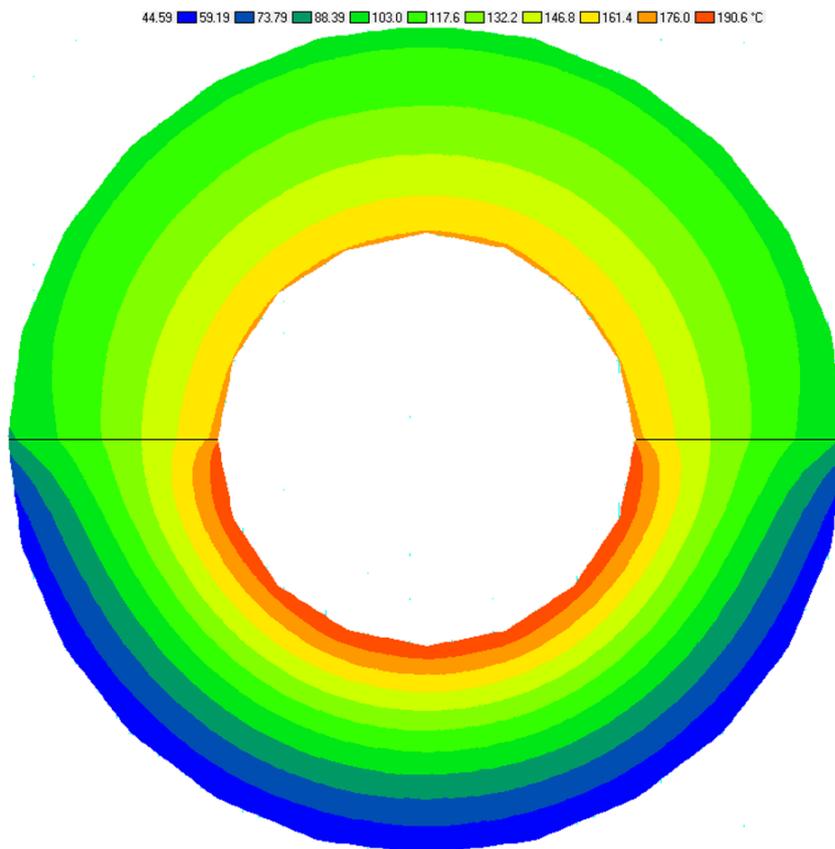
$$T_{sup,int,A} = T_{int} - \dot{Q}_A R_{conv,int,A} = 200 - 582 \times 0,0637 = 162,9 \text{ }^\circ\text{C}$$

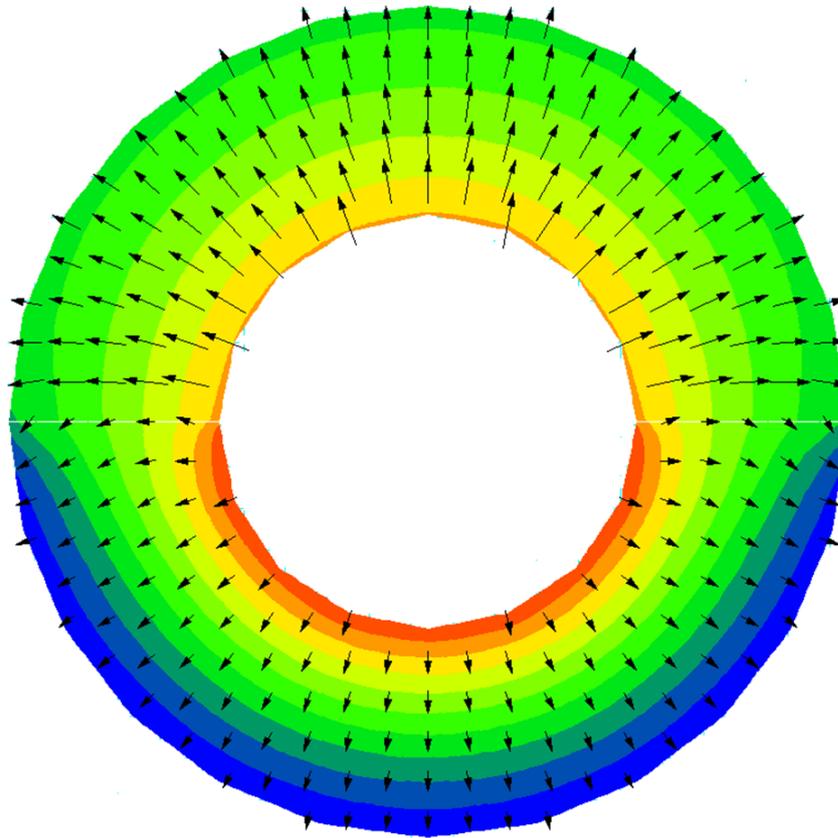
$$T_{sup,ext,A} = T_{ext} + \dot{Q}_A R_{conv,ext,A} = 25 + 582 \times 0,127 = 98,9 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_{sup,int,B} = T_{int} - \dot{Q}_B R_{conv,int,B} = 200 - 163 \times 0,0637 = 189,6 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_{sup,ext,B} = T_{ext} + \dot{Q}_B R_{conv,ext,B} = 25 + 163 \times 0,127 = 45,7 \text{ }^\circ\text{C}$$

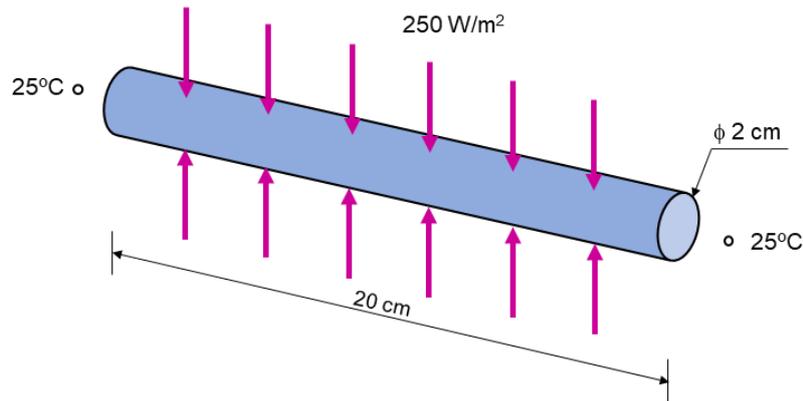
De modo a julgar a aproximação utilizada – não passagem de calor na junção A-B – aplicou-se um modelo numérico 2D considerando transferência entre A e B, usando o método dos elementos finitos. As figuras seguintes apresentam resultados para 7872 nodos.





O primeiro gráfico representa a distribuição de temperaturas com 10 intervalos de temperatura e respetivos códigos de cores. O segundo gráfico sobrepõe ao anterior os vetores de fluxo de calor. Note-se que os fluxos se dão praticamente na direção radial, pelo que a aproximação de condução 1D radial é bastante boa. A exceção verifica-se numa pequena zona muito próxima da interface A-B, em que há uma componente circunferencial dos fluxos. As temperaturas superficiais em A e B calculadas anteriormente (modelo 1D) estão dentro dos intervalos da representação 2D. As potências obtidas com o modelo 2D são de: $\dot{Q}_A = 560 \text{ W/m}$ e $\dot{Q}_B = 178 \text{ W/m}$, sendo o total de 738 W. O valor de \dot{Q}_A é um pouco inferior (4%) no cálculo 2D e o valor de \dot{Q}_B um pouco superior (9%). O menor valor da potência em A deve-se a que parte do calor que passaria na hipótese 1D radialmente junto à junção A-B, é na realidade “desviado” para B, devido à menor temperatura em B (ver figura), indo então aumentar a potência que passa em B. No entanto os valores totais são muito próximos (745 versus 738 W), com uma diferença inferior a 1%. Note-se que apesar da melhor aproximação à realidade do método numérico 2D, este não é exato, estando também sujeito a erros.

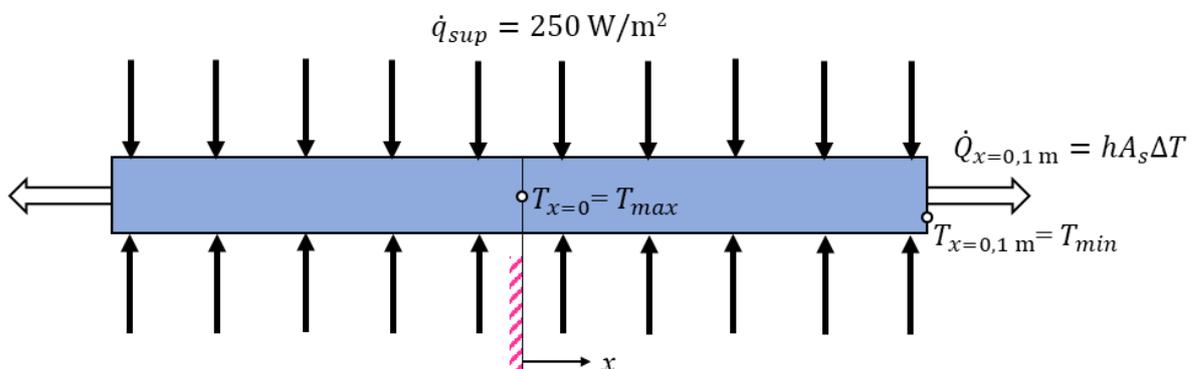
P1.6



A figura acima representa uma peça cilíndrica em aço ($k=25 \text{ W/m}^\circ\text{C}$), com as dimensões assinaladas. A peça é aquecida por uma manga de resistências elétricas, que lhe fornece uma potência superficial de 250 W/m^2 . Os topos da peça transferem calor para o exterior (a 25°C) a uma taxa de $20 \text{ W/m}^2\text{K}$. Calcule as temperaturas máxima e mínima na peça, em regime permanente.

Resolução e discussão

Trata-se de um problema de condução em regime permanente. Atendendo ao pequeno diâmetro da peça, face ao seu comprimento, é razoável admitir que a temperatura não varia na sua secção, variando apenas ao longo do comprimento. Assim, procuramos uma solução 1D, que pode representar-se na figura seguinte, sendo x a coordenada ao longo do comprimento.



Por uma questão de simetria, e facilidade de cálculo, a origem do eixo x foi colocada no centro da peça. Será nesse ponto ($x=0$) que se verificará a temperatura máxima. A temperatura decrescerá desse ponto para a esquerda, e desse ponto para a direita, até aos topos, onde a temperatura será mínima, transferindo-se calor para o exterior.

Não se pode usar a equação (1.6) uma vez que a peça recebe calor na superfície (ao longo de x), mas pode adaptar-se a equação (1.5), válida para geração interna de calor. Uma vez que a temperatura por hipótese não varia na secção, a potência fornecida à superfície tem o mesmo efeito na temperatura que o fornecimento uniforme por unidade de volume. Há só que adaptar a equação (1.5) de modo a calcular a fonte equivalente (\dot{g}). Essa fonte pode obter-se dividindo a potência total pelo volume, vindo então a equação

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{g}}{k} = \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}_{sup}PL/V}{k} = \frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}_{sup}4/D}{k} = 0$$

onde P é o perímetro da secção da peça, L o comprimento, V o volume e D o diâmetro.

A sua integração conduz a

$$T = -\frac{2\dot{q}_{sup}}{kD}x^2 + C_1x + C_2$$

Tendo colocado $x=0$ no centro da peça, a que corresponde um eixo de simetria, pode impôr-se $dT/dx|_{x=0} = 0$, o que leva a que $C_1 = 0$. Quanto a C_2 , que equivale a $T|_{x=0} = T_{max}$, pode calcular-se pela condição fronteira no topo:

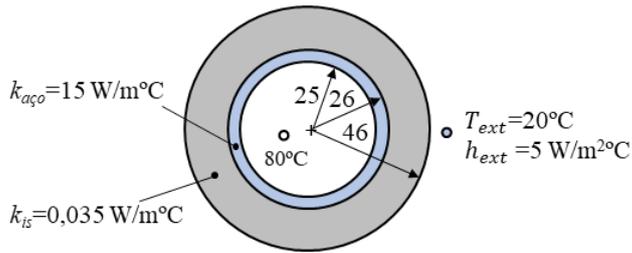
$$-k \frac{dT}{dx} \Big|_{x=0,1} = h(T|_{x=0,1} - 25) \Rightarrow -k \left(-\frac{4\dot{q}_{sup}}{kD} \times 0,1 \right) = h \left(-\frac{2\dot{q}_{sup}}{kD} 0,1^2 + C_2 - 25 \right)$$

da qual resulta $C_2 = 285$.

Assim, $T_{max} = T|_{x=0} = C_2 = 285^\circ\text{C}$, e da equação de T vem $T_{min} = T|_{x=0,1} = 275^\circ\text{C}$.

A temperatura da peça varia então 10°C entre o centro e os topos.

Poder-se-ia obter uma solução com um método numérico 2D, considerando a variação da temperatura com x e com o raio r , tendo em conta que a temperatura não varia circunferencialmente (com o ângulo θ da Figura 1.1), uma vez que a peça é aquecida uniformemente em todo o perímetro da superfície cilíndrica. Mas, como suposto inicialmente, a variação radial é desprezável face à longitudinal.

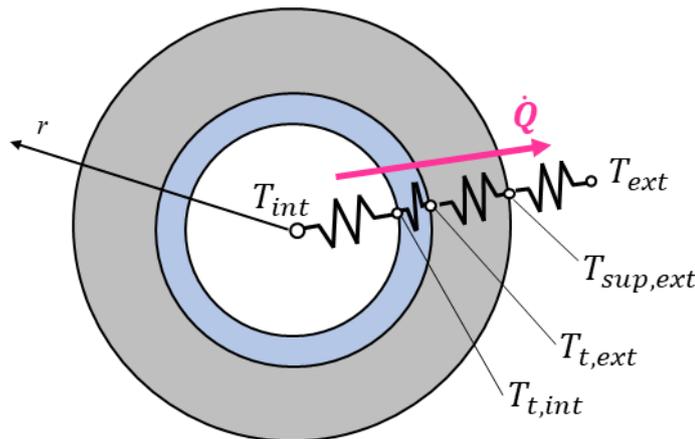
P1.7


Numa rede de distribuição de água quente a 80°C esta circula num tubo de aço com as dimensões da figura. O tubo é revestido por uma manga de isolante térmico, com a espessura de 20 mm. O coeficiente de convecção interior (água) é de 2000 W/m²°C, e o coeficiente de

transferência de calor para o exterior de 5 W/m²°C. Calcule a potência calorífica perdida (por metro de comprimento) e as temperaturas nos vários pontos do conjunto. Diga se será benéfico aumentar a espessura do isolamento.

Resolução e discussão

Este é um problema de condução em regime permanente, que com muito boa aproximação se pode considerar monodimensional radial. A simetria de condições em torno do conjunto (circunferencial) assim o justifica, bem como a consideração de condições constantes ao longo do comprimento de escoamento. A figura seguinte resume a transferência de calor do interior para o exterior, com as respetivas resistências de condução cilíndrica e temperaturas mais relevantes.



Pode calcular-se a resistência global somando as 4 resistências em série. Usando a equação (1.18), para um comprimento de 1 m:

$$R_{global} = \frac{1}{h_{int}\pi D_{int}} + \frac{\ln(D_{t,ext}/D_{t,int})}{2\pi k_{aço}} + \frac{\ln(D_{ext}/D_{t,ext})}{2\pi k_{is}} + \frac{1}{h_{ext}\pi D_{ext}} =$$

$$= \frac{1}{2000\pi \times 2 \times 0,025} + \frac{\ln(26/25)}{2\pi \times 15} + \frac{\ln(46/26)}{2\pi \times 0,035} + \frac{1}{5\pi \times 2 \times 0,046} = 3,290 \text{ m}^\circ\text{C/W}$$

A potência calorífica pode então calcular-se dividindo a diferença de temperaturas (80-20) pela resistência global, o que resulta em $\dot{Q} = 18,2 \text{ W/m}$.

Podem obter-se as temperaturas relevantes a partir das resistências individuais:

$$T_{t,int} = T_{int} - \dot{Q} R_{conv,int} = 80 - 18,2 \times 0,00318 = 79,94 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_{t,ext} = T_{t,int} - \dot{Q} R_{cond,aço} = 79,94 - 18,2 \times 4,161 \times 10^{-4} = 79,93 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_{sup,ext} = T_{t,ext} - \dot{Q} R_{cond,is} = 79,93 - 18,2 \times 2,594 = 32,72 \text{ } ^\circ\text{C}$$

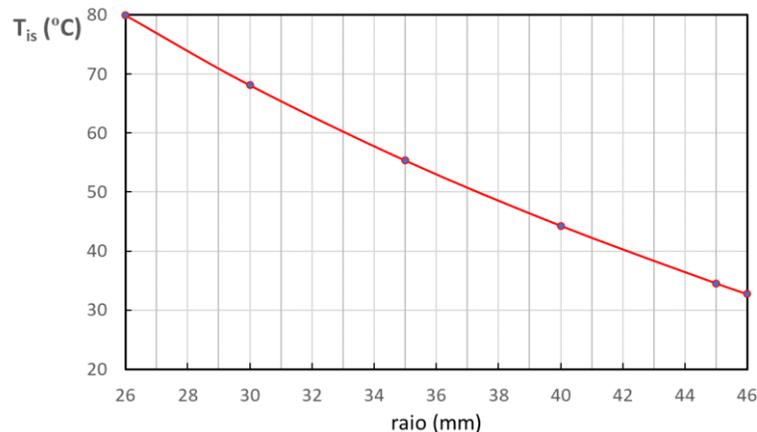
Como as resistências de convecção interior e de condução no tubo de aço são muito baixas, a temperatura praticamente só varia no isolante, e daí para o exterior. Podemos obter a temperatura para qualquer ponto do isolante através da integração da equação (1.14):

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_{is}}{dr} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT_{is}}{dr} = \frac{C_1}{r} \quad \Rightarrow \quad T_{is} = C_1 \ln(r) + C_2$$

podendo calcular-se C_1 e C_2 a partir das condições nas fronteiras do isolante, que podem ser as temperaturas já calculadas. Virá assim

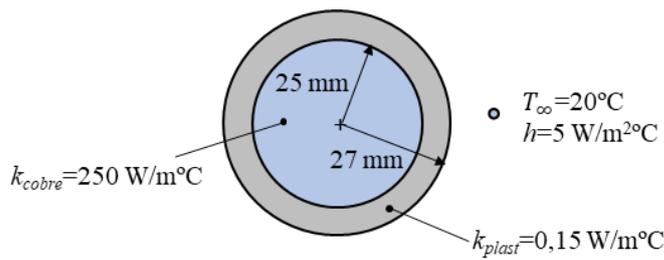
$$T_{is}(r) = \frac{T_{t,ext} - T_{sup,ext}}{\ln(r_{t,ext}/r_{ext})} \ln\left(\frac{r}{r_{ext}}\right) + T_{sup,ext} = 32,72 - 82,75 \ln\left(\frac{r}{0,046}\right)$$

O gráfico seguinte mostra a evolução da temperatura do isolante ao longo do raio. Note-se a maior variação para raios menores, devida à menor área da secção de condução.



Para avaliar o benefício do aumento da espessura de isolante podemos recorrer ao cálculo do raio crítico. Como visto na equação (1.19), $r_{cr} = k_{is}/h_{ext}$, o que dará $r_{cr} = 0,007$ m. Assim, como o raio exterior do tubo (mínimo para o isolante) é de 26 mm, neste caso não existe uma espessura de isolante que conduza a uma potência transferida máxima, pelo que o aumento dessa espessura se traduz sempre numa diminuição da potência. Poderá ser definido um valor ótimo tendo em conta o aumento do custo do isolante com a espessura, e a diminuição das perdas (de energia) com o aumento da espessura – a chamada espessura económica de isolamento.

P1.8



Um cabo elétrico é constituído por um cilindro em cobre ($k=250 \text{ W/mK}$) com 50 mm de diâmetro, revestido por um isolante elétrico de plástico ($k=0,15 \text{ W/mK}$) com espessura de 2 mm. Ao passar corrente elétrica, gera-se a potência uniforme no cobre de 39000 W/m^3 .

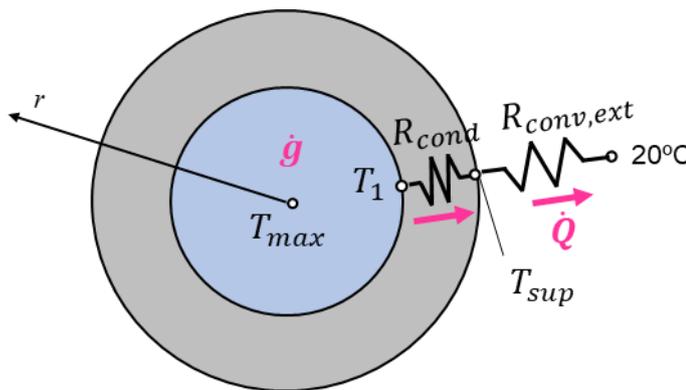
O conjunto está rodeado por ar calmo à temperatura de 20°C , com um coeficiente de transferência para o exterior de $5 \text{ W/m}^2\text{K}$.

Calcule a temperatura na superfície exterior (plástico) e na interface cobre-plástico, e ainda a temperatura máxima no cobre. Alterando a espessura do revestimento do cabo conseguiria uma menor temperatura interior?

Resolução e discussão

Trata-se de outro problema de condução radial (1D) em regime permanente. Neste caso um material (cobre) tem uma fonte de calor interna, e no outro há condução sem fontes.

A figura seguinte esquematiza o problema. Queremos calcular T_{sup} , T_1 e T_{max} . A temperatura máxima ocorre no centro ($r=0$).



Em regime permanente a potência que passa para o exterior é exatamente igual à que se gera no interior do cobre, que se pode calcular por

$$\dot{Q} = \dot{g} V = 39000 \times \pi r_i^2 \times 1 = 76,6 \text{ W/m}$$

Podem obter-se as temperaturas na superfície exterior e na interface a partir das resistências individuais:

$$T_{sup} = T_{ext} + \dot{Q} R_{conv,ext} = 20 + 76,6 \times \frac{1}{5 \times 2\pi \times 0,027 \times 1} = 110,31^\circ\text{C}$$

$$T_1 = T_{sup} + \dot{Q} R_{cond} = 110,31 + 76,6 \times \frac{\ln(27/25)}{2\pi \times 0,15 \times 1} = 116,57^\circ\text{C}$$

Quanto a T_{max} , teremos de a calcular considerando a condução radial com fontes internas, ou seja, através da resolução da equação (1.13).

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT_{cobre}}{dr} \right) + \frac{\dot{g}}{k_{cobre}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT_{cobre}}{dr} = -\frac{\dot{g} r}{2k_{cobre}} + \frac{C_1}{r} \quad \Rightarrow$$

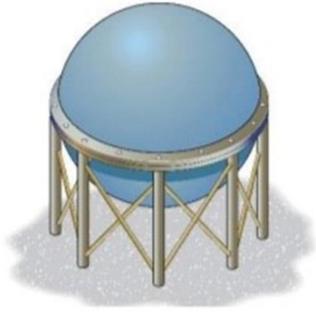
$$\Rightarrow T_{cobre} = -\frac{\dot{q} r^2}{4k_{cobre}} + C_1 \ln(r) + C_2$$

podendo calcular-se C_1 e C_2 a partir das condições nas fronteiras do cilindro de cobre. Estas são: na interface $T_{cobre} = T_1$, e em $r=0$ $dT_{cobre}/dr = 0$, porque no eixo existe simetria e fluxo zero, daí resultando que $C_1 = 0$. Quanto a C_2 virá

$$T_{cobre}|_{r=r_1} = -\frac{\dot{q} r_1^2}{4k_{cobre}} + 0 \times \ln(r) + C_2 = 116,57$$

pelo que $C_2 = 116,59$. Assim, em $r=0$: $T_{max} = C_2 = 116,59^\circ\text{C}$. Esta temperatura é muito pouco superior à temperatura da interface (T_1) porque o cobre tem uma condutibilidade térmica muito elevada.

Quanto à análise da espessura do revestimento isolador, o raio crítico é de $r_{cr} = k_{is}/h_{ext}$, o que dá $r_{cr} = 0,03$ m ou 30 mm. Isso significa que ao aumentar a espessura de 2 mm (raio exterior de 27 mm) para 5 mm (raio exterior de 30 mm) se diminui a resistência para o exterior, diminuindo a temperatura interior (assumindo que o coeficiente exterior se mantém). Com 5 mm de espessura a temperatura T_1 virá igual a $116,09^\circ\text{C}$. A maior redução de temperatura verificar-se-á na superfície exterior, com uma temperatura de $101,3^\circ\text{C}$, ou seja, uma redução de 9°C .

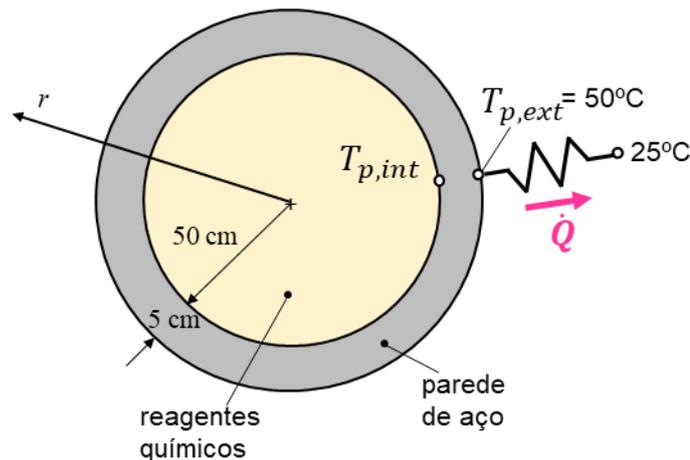
P1.9


Um depósito esférico de aço ($k=15 \text{ W/mK}$) contém reagentes químicos que libertam calor para o exterior. O depósito tem um diâmetro interior de 1 m e um diâmetro exterior de 1,1 m. Com uma temperatura exterior de 25°C , mede-se uma temperatura de 50°C na superfície exterior do depósito, que se mantém constante no tempo. Nestas condições, estima-se um coeficiente de transferência de calor exterior de $40 \text{ W/m}^2\text{K}$.

Calcule a potência transferida para o exterior e a temperatura em 2 secções do depósito: parede interior e espessura intermédia da parede.

Resolução e discussão

Mantendo-se a temperatura do depósito ao longo do tempo, verifica-se a existência de regime permanente. Admitem-se condições idênticas a toda a volta do depósito, pelo que, desprezando a influência da estrutura de suporte, podemos admitir que a condução do calor se dá apenas radialmente. A figura seguinte resume as condições gerais.



O conhecimento da temperatura da parede exterior, da temperatura exterior e do coeficiente de transferência, permite calcular a potência transferida:

$$\dot{Q} = h A_{p,ext} (T_{p,ext} - T_{ext}) = 40 \times 4\pi \times 0,55^2 \times (50 - 25) = 3801 \text{ W}$$

A partir da potência já calculada e da resistência de condução esférica na parede pode calcular-se a temperatura da parede interior. No entanto, como também é pedida a temperatura a meio da parede, opta-se por usar a equação (1.21) para condução esférica sem fontes, que pode ser integrada, permitindo calcular a temperatura em qualquer secção da parede esférica:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT_p}{dr} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT_p}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \quad \Rightarrow \quad T_p = -\frac{C_1}{r} + C_2$$

As condições fronteira para cálculo de C_1 e C_2 são a temperatura $T_{p,ext} = 50^\circ\text{C}$ e a potência calorífica já calculada (igual em $r = r_{int}$ e em $r = r_{ext}$). Ou seja,

$$50 = -\frac{C_1}{0,55} + C_2 \quad \text{e} \quad \dot{Q} = -k A_{p,ext} \left. \frac{dT_p}{dr} \right|_{r=r_{ext}} = -15 \times 4\pi \times 0,55^2 \frac{C_1}{0,55^2} = 3801$$

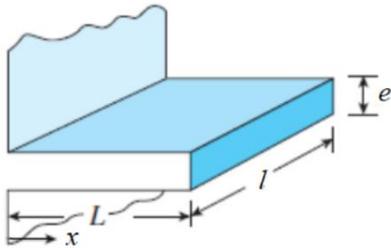
Calculam-se assim $C_1 = -20,16$ e $C_2 = 12,55$. A equação para a temperatura da parede em função do raio vem

$$T_p = \frac{20,16}{r} + 12,55$$

Substituindo r por $r_{int} = 0,5$, e r por $(r_{int} + r_{ext})/2 = 0,525$, obtêm-se

$$T_{p,int} = 52,9^\circ\text{C} \text{ e } T_{p,meio} = 51,0^\circ\text{C}$$

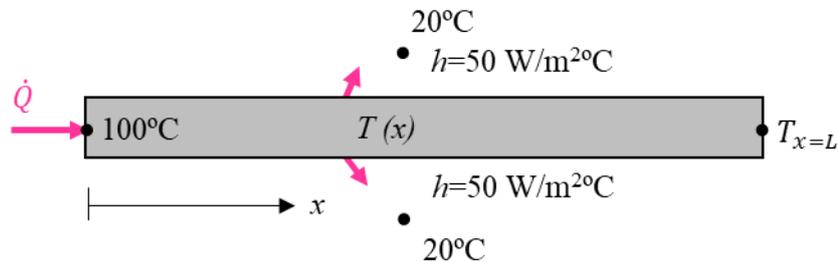
A temperatura varia mais (maior gradiente) no interior que no exterior da parede, pela menor área da secção no interior.

P1.10


Considere uma alheta retangular de secção constante, com 17 mm de comprimento (L), 2 mm de espessura (e) e 10 cm de largura (l), em liga de alumínio ($k=200$ W/mK). A temperatura na base é de 100°C , a temperatura exterior de 20°C , e o coeficiente de transferência exterior é de 50 W/m²K. Obtenha a distribuição de temperatura e a potência calorífica transferida na alheta. Compare os resultados obtidos ao desprezar ou considerar perdas no topo.

Resolução e discussão

Vamos então admitir uma solução 1D, com a temperatura a variar ao longo de x , mantendo-se igual em qualquer ponto da secção da alheta (com uma área constante). As condições estão resumidas na figura seguinte.



Para calcular a temperatura em qualquer ponto vamos então recorrer à equação (1.30), que admite nula/desprezável a transferência de calor no topo ($x=L$).

$$\theta = \theta_b \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)} = (100 - 20) \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}$$

com

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA_s}} = \sqrt{\frac{50 \times (2 \times 0,10 + 2 \times 0,002)}{200 \times 0,10 \times 0,002}} = 15,97 \text{ m}^{-1}$$

Em particular, para o topo vem

$$\theta_{x=0,017} = (100 - 20) \frac{\cosh(0)}{\cosh(15,97 \times 0,017)} = 77,1^\circ\text{C} \quad \Rightarrow \quad T_{x=0,017} = 97,1^\circ\text{C}$$

Quanto à potência transferida, usando a equação (1.31), também válida para trocas desprezáveis no topo

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \theta_b \sqrt{hPkA_s} \tanh(mL) = \\ &= 80 \sqrt{50 \times 0,204 \times 200 \times 0,0002} \tanh(15,97 \times 0,017) = 13,5 \text{ W} \end{aligned}$$

Usando a solução com perdas no topo – equação (1.32) – vamos obter

$$\theta_{x=0,017} = 80 \frac{\cosh(0) + \sinh(0)}{\cosh(15,97 \times 0,017) + (50 / (15,97 \times 200)) \sinh(15,97 \times 0,017)} = 76,8^\circ\text{C}$$

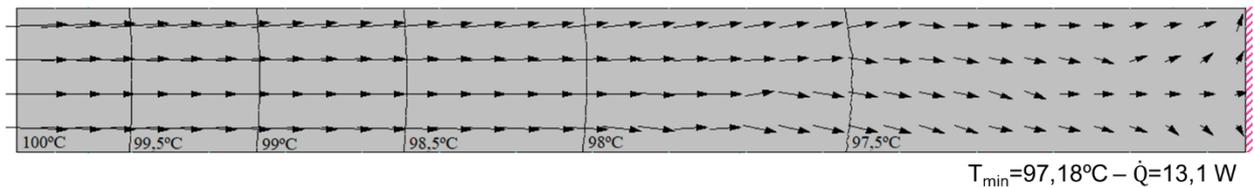
$$T_{x=0,017} = 96,8^\circ\text{C}$$

e de (1.33):

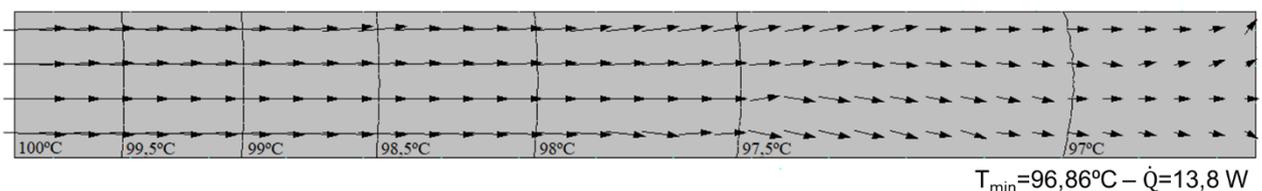
$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \theta_b \sqrt{hPkA_s} \frac{\sinh(mL) + (h/mk) \cosh(mL)}{\cosh(mL) + (h/mk) \sinh(mL)} = \\ &= 80 \sqrt{50 \times 0,204 \times 200 \times 0,0002} \frac{\sinh(15,97 \times 0,017) + \left(\frac{50}{15,97 \times 200}\right) \cosh(15,97 \times 0,017)}{\cosh(15,97 \times 0,017) + \left(\frac{50}{15,97 \times 200}\right) \sinh(15,97 \times 0,017)} = \\ &= 14,3 \text{ W} \end{aligned}$$

Note-se que considerando as perdas no topo, a temperatura no topo é um pouco inferior (menos 0,3°C, porque o topo perde mais calor) e a potência dissipada é um pouco superior (cerca de 5%).

Vamos ainda comparar com um cálculo mais realista, considerando a existência de condução 2D na alheta (também ao longo da espessura). Aplicando um modelo numérico de elementos finitos com 288 nodos a toda a espessura e comprimento da alheta, no caso da imposição de fluxo zero no topo obtiveram-se as seguintes isotérmicas e representação de fluxos:



No caso de existirem trocas no topo obteve-se a figura:



Note-se que os vetores fluxo de calor são quase horizontais (sobretudo quando maiores), o que mostra a aproximação a 1D. As exceções verificam-se junto ao topo e superfícies, mas com pouco peso. As temperaturas no topo são quase iguais (diferença menor que 0,1°C). Quanto às potências são ligeiramente superiores na solução 1D, mas há que considerar que as soluções 2D não consideram as trocas nas superfícies laterais (correspondentes à largura de 0,1 m da alheta): por exemplo, com o modelo 1D a potência sem trocas no topo e superfícies laterais será de 13,3 W, muito próxima dos 13,1 W da solução 2D.

P1.11

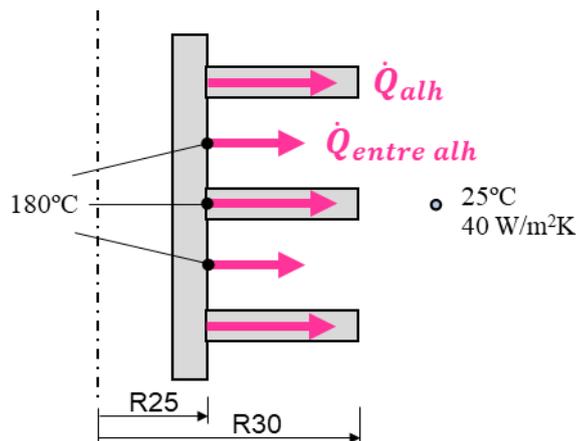


Para aproveitar o calor de uma tubagem de vapor vão ser colocadas alhetas circulares com 60 mm de diâmetro e espessura de 1 mm em tubos de 50 mm de diâmetro. As alhetas são em liga de alumínio ($k=186 \text{ W/mK}$) e a superfície exterior dos tubos pode considerar-se à temperatura do vapor, de 180°C . O ambiente exterior está a 25°C , e o coeficiente de transferência exterior é de $40 \text{ W/m}^2\text{K}$.

Sendo o espaçamento entre alhetas de 3 mm, ou seja, havendo 250 alhetas por metro de comprimento, calcule o aumento da transferência de calor devido à adição das alhetas.

Resolução e discussão

Existe condução radial num tubo e em alhetas circulares, que se pode supôr 1D (ao longo do raio); admitem-se condições iguais ao longo do eixo do tubo, pelo que o cálculo será feito por unidade de comprimento de tubo. Uma das hipóteses a considerar é a de todos os pontos da superfície exterior do tubo se encontrarem a 180°C , quer na zona em contacto com o exterior, quer na zona em contacto com as alhetas, o que é uma aproximação à realidade. A figura seguinte resume as condições do problema



Começemos por calcular a potência transferido se não se utilizarem alhetas. Teremos:

$$\dot{Q}_{s/alh} = hA_{s/alh}(T_b - T_\infty) = 40 \times \pi \times 0,05 \times (180 - 25) = 974 \text{ W/m}$$

O efeito das alhetas pode contabilizar-se usando o seu rendimento. Recorrendo à Figura 1.7 encontramos

$$L = r_2 - r_1 = 0,005 \text{ m}; \quad L_c = L + e/2 = 0,0055 \text{ m}$$

$$r_{2c}/r_1 = (r_2 + e/2)/r_1 = 1,22$$

$$L_c^{3/2} \left(\frac{h}{kL_c e} \right)^{1/2} = 0,08$$

resultando um rendimento $\eta_{alh} = 0,97$.

A potência que atravessa uma alheta pode agora ser calculada, contabilizando toda a área de convecção da alheta circular (incluindo o topo):

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{1alh} &= \eta_{alh} h A_{sup,1alh} (T_b - T_{\infty}) = \\ &= 0,97 \times 40 \times 2\pi \times (0,03^2 - 0,025^2 + 0,03 \times 0,001) \times (180 - 25) = 11,53 \text{ W}\end{aligned}$$

Para todas as alhetas contidas num metro de tubo (250), e somando ainda a potência que se transfere nos espaços entre alhetas, temos

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{total} &= n_{alh} (\dot{Q}_{1alh} + \dot{Q}_{entre\ alh}) = \\ &= 250 \times (11,53 + 40 \times \pi \times 0,05 \times 0,003 \times 155) = 3613 \text{ W/m}\end{aligned}$$

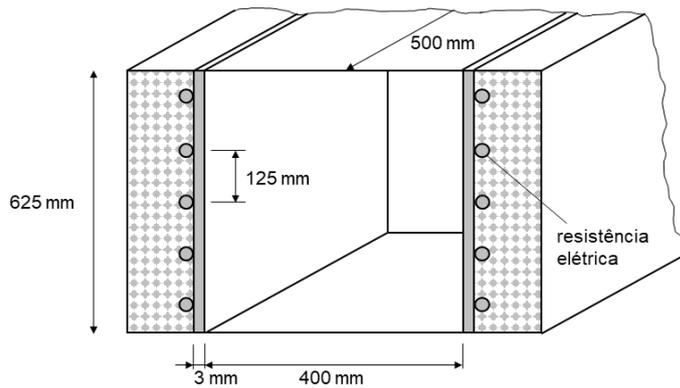
Relativamente à não utilização de alhetas, há um aumento muito significativo da potência calorífica transmitida, que é de 2639 W/m (aumento para 3,7 vezes).

Pode também calcular-se o rendimento superficial, referido na equação (1.37), que será

$$\eta_{sup} = \eta_{alh} \frac{n_{alh} A_{1alh}}{A_{tot}} + \frac{n_{alh} A_{entre\ alh}}{A_{tot}} = 0,970 \times 0,803 + 0,197 = 0,976$$

um pouco superior ao rendimento das alhetas.

P1.12



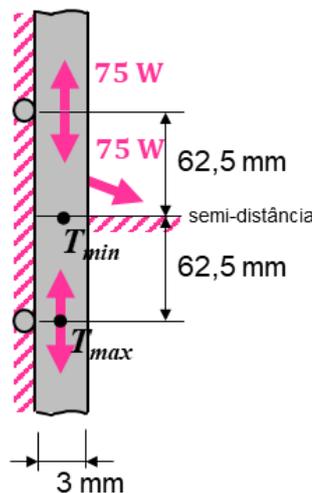
A figura representa um pequeno forno para tratamentos térmicos. O seu aquecimento é feito através de resistências elétricas colocadas em contacto com placas laterais, em aço ($k=15 \text{ W/mK}$) e com 3 mm de espessura. As 10 resistências estão igualmente espaçadas, fornecendo uma potência total de 1,5 kW. As paredes do forno estão bem isoladas.

Com as resistências ligadas, no interior do forno atinge-se o regime permanente com uma temperatura do ar interior de 600°C , sendo o coeficiente de convecção de $30 \text{ W/m}^2\text{K}$.

Calcule a temperatura máxima e a temperatura mínima nas placas. Se se pretender limitar a temperatura máxima nas placas a 700°C , com a mesma potência do forno, o que se deverá fazer?

Resolução e discussão

Vamos admitir condução monodimensional (permanente) nas placas laterais, tendo em conta a sua reduzida espessura e boa condutibilidade; a condução dá-se na direção vertical. As placas transferem calor simultaneamente por convecção para o ar interior, pelo que podemos aplicar soluções vistas em 1.1.4, como as das alhetas. Atendendo à simetria vertical, podemos analisar uma zona situada entre uma resistência e o plano médio entre resistências. Esse plano médio (a meia distância entre resistências) não transfere calor devido à simetria (equivale a um plano isolado). O que se passa nessa zona repete-se diversas vezes ao longo da vertical. A figura seguinte resume a situação e condições do problema.



Então podemos usar as equações (1.30) e (1.31), válidas para θ_b na base (plano da resistência) e fluxo zero para $x=L$ (plano a meia distância entre resistências). Cada resistência, com uma potência igual a 150 W, fornecerá 75 W para cada lado.

O parâmetro m contabilizará um perímetro de convecção igual à profundidade da placa (que só transfere calor na face interior), e uma secção igual à espessura vezes a profundidade:

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA_s}} = \sqrt{\frac{30 \times 0,5}{15 \times 0,003 \times 0,5}} = 25,82 \text{ m}^{-1}$$

Da equação (1.31) pode obter-se a temperatura (máxima) a partir da potência:

$$\theta_b = \frac{\dot{Q}}{\sqrt{hPkA_s} \tanh(mL)} = \frac{75}{\sqrt{30 \times 0,5 \times 15 \times 0,003 \times 0,5} \tanh(25,82 \times 0,0625)} = 139,8 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_{max} = T_{x=0} = 739,8 \text{ }^\circ\text{C}$$

Da equação (1.30) vamos obter a temperatura mínima:

$$\theta_{x=L=0,0625} = \theta_b \frac{\cosh(0)}{\cosh(mL)} = 139,8 \frac{\cosh(0)}{\cosh(25,82 \times 0,0625)} = 53,6 \text{ }^\circ\text{C}$$

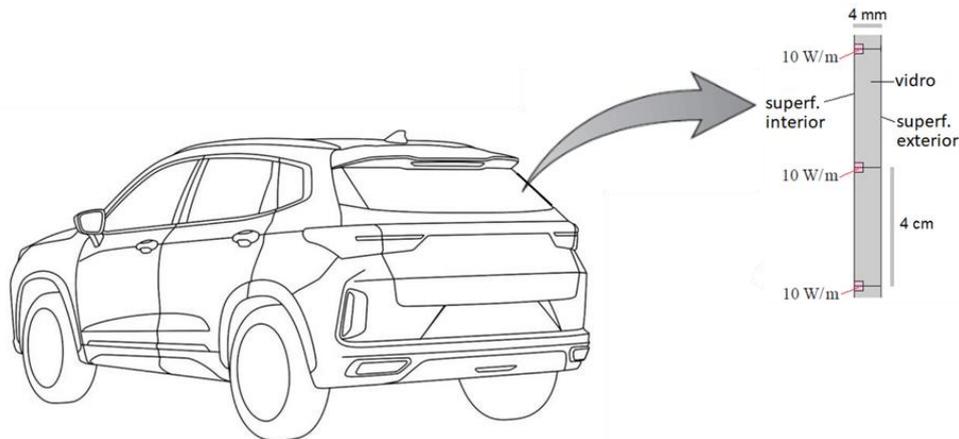
$$T_{min} = T_{x=0,0625} = 653,6 \text{ }^\circ\text{C}$$

Assim, temos uma variação de 86°C em 62,5 mm.

Para limitar a temperatura máxima na placa, e ao mesmo tempo reduzir a variação de temperatura, podem usar-se mais resistências de menor potência, mais próximas umas das outras.

Por exemplo, usando 20 resistências de 75 W cada, em vez de 10 resistências de 150 W, teríamos $L=0,03125$ m. O valor de θ_b seria 96,7°C e a $T_{max}=696,7^\circ\text{C}$, menor do que os 700°C como requerido. Quanto a T_{min} seria 672,0°C, vindo o diferencial de temperatura igual a cerca de 25°C (3,4 vezes menor).

P1.13

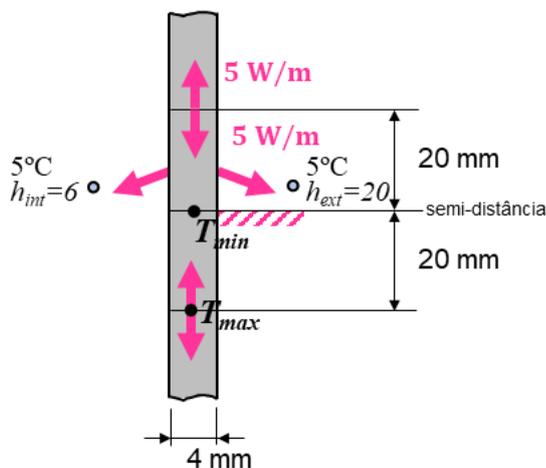


Para eliminar a condensação no vidro traseiro de um automóvel são usados fios elétricos de espessura desprezável, ligados à superfície interior do vidro. Os fios estão espaçados 4 cm e geram uma potência calorífica de 10 W/m (por metro de largura do vidro) quando atravessados pela corrente elétrica. Devido à reduzida espessura do vidro, pode considerar-se que a sua temperatura não varia ao longo da espessura, e que a potência fornecida pelos fios é também uniforme na sua espessura.

O vidro pode considerar-se como uma placa plana, tem uma condutibilidade térmica $k=0,84$ W/m°C e uma difusibilidade térmica $\alpha = k/\rho/c_p = 0,39 \times 10^{-6}$ m²/s. Os coeficientes de transferência de calor na superfície interior e exterior do vidro são de 6 e 20 W/m²°C, respetivamente. Sendo a temperatura interior e exterior de 5°C, calcule a temperatura máxima e mínima no vidro no espaço entre fios, em regime permanente.

Resolução e discussão

Vamos admitir condução 1D (permanente) no vidro, entre fios, tendo em conta a sua reduzida espessura. O vidro transfere calor nas 2 superfícies, interior e exterior, sendo os coeficientes diferentes nos 2 lados. Como no problema P1.12, podemos analisar uma zona situada entre um fio elétrico e o plano médio entre fios, que se repete simetricamente ao longo de todo o vidro. Podemos adaptar as soluções vistas em 1.1.4, para contabilizar os diferentes coeficientes de transferência para fora do vidro. A figura seguinte resume a situação e condições do problema.



Podemos novamente usar as equações (1.30) e (1.31), válidas para θ_b na base (plano do fio elétrico) e fluxo zero para $x=L$ (plano a meia distância entre fios elétricos). Cada fio, com uma

potência igual a 10 W/m, fornecerá 5 W/m para cada lado. Quanto à largura, será considerada uma dimensão unitária (1 m).

O parâmetro m deverá contabilizar toda a transferência de calor para fora do vidro, pelo que se deverá somar o que acontece no interior e exterior:

$$hP = h_{int}P_{int} + h_{ext}P_{ext} = 6 \times 1 + 20 \times 1 = 26 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$$

$$m = \sqrt{\frac{hP}{kA_s}} = \sqrt{\frac{26}{0,84 \times 0,004 \times 1}} = 87,97 \text{ m}^{-1}$$

Da equação (1.31) pode obter-se a temperatura (máxima) a partir da potência:

$$\theta_{x=0} = \frac{\dot{Q}}{\sqrt{hPkA_s} \tanh(mL)} = \frac{5}{\sqrt{26 \times 0,84 \times 0,004 \times 1} \tanh(87,97 \times 0,020)} = 18,0 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_{max} = T_{x=0} = 23,0 \text{ }^\circ\text{C}$$

Da equação (1.30) vamos obter a temperatura mínima:

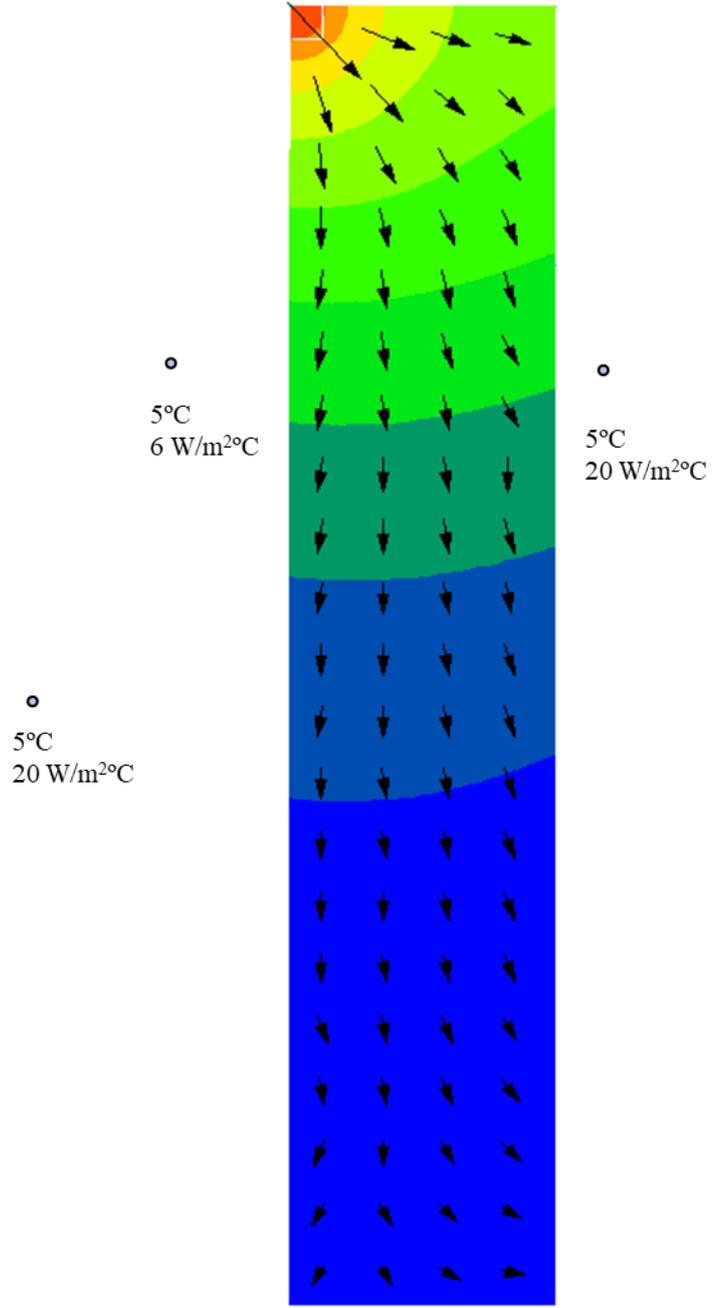
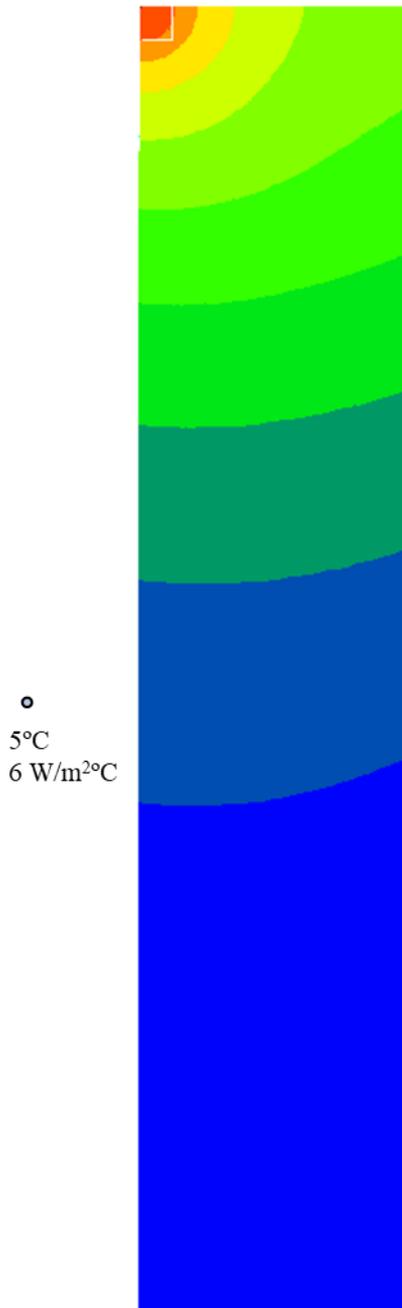
$$\theta_{x=L=0,020} = \theta_b \frac{\cosh(0)}{\cosh(mL)} = 18,0 \frac{\cosh(0)}{\cosh(87,97 \times 0,020)} = 6,0 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$T_{min} = T_{x=0,02} = 11,0 \text{ }^\circ\text{C}$$

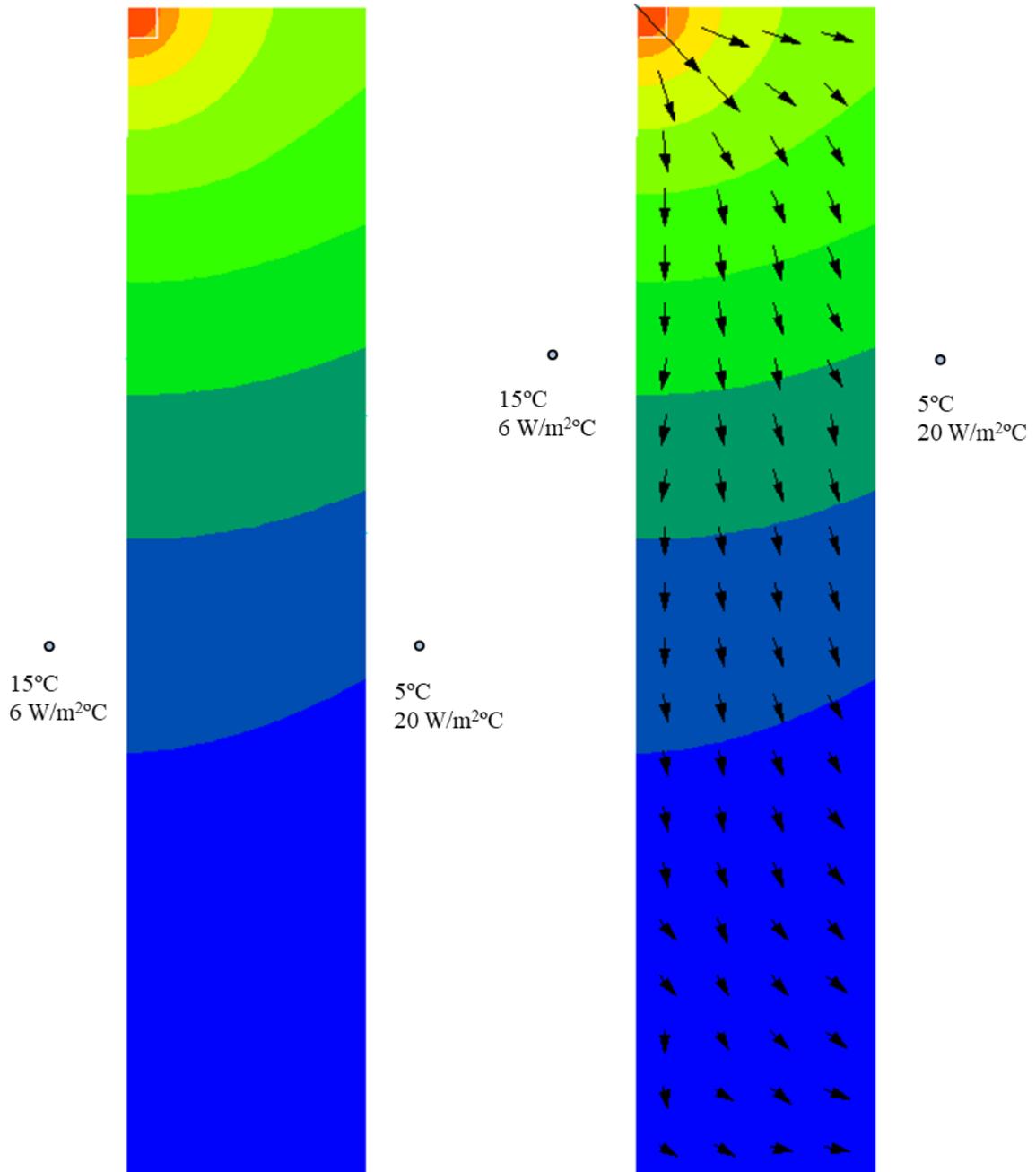
A hipótese considerada de condução 1D é menos realista que no problema P1.12. Isto porque, apesar da reduzida espessura, a condutibilidade térmica do vidro é relativamente baixa. Com o objetivo de fazer essa avaliação, construiu-se um modelo numérico 2D (elementos finitos). O domínio espacial considerado foi exatamente o que corresponde ao espaço entre um fio elétrico e meia distância entre fios. Foi usada uma malha com 5697 nodos. As condições fronteira impostas foram: potência nula a meia distância entre fios elétricos (simetria), transferência nas superfícies laterais (para o interior e o exterior do vidro, fornecendo a temperatura e respetivos coeficientes de transferência), e 2 condições na fronteira horizontal junto ao fio elétrico ($x=0$); nesta fronteira, numa área muito pequena é gerada a potência de 5 W/m (quase pontualmente), e na restante zona fronteira há condições de simetria.

Os resultados, apresentados na forma de intervalos de temperatura com diferentes cores e vetores fluxo de calor, encontram-se na figura seguinte. Note-se que a transferência de calor ao longo da espessura, e portanto a diferença para a situação 1D, é mais significativa junto à fronteira aquecida pelo fio elétrico, e respetivo canto. Mais para baixo as isotérmicas são menos inclinadas. No entanto, a diferença entre os coeficientes à esquerda (interior) e à direita (exterior) faz com que as isotérmicas nunca sejam horizontais. No modelo 2D a temperatura média da fronteira junto ao fio ($x=0$) é próxima da calculada no modelo 1D (23°C), e as temperaturas a meia distância ($x=L$) são muito próximas (10,8°C em 2D versus 11,0°C com 1D). Numa outra figura apresentam-se resultados para o caso em que a temperatura à esquerda (interior) é mais alta que à direita (exterior) – 15°C e 5°C. Nesta situação não é aplicável o modelo 1D e as equações apresentadas em 1.1.4, porque estas exigem uma temperatura constante fora do corpo. O modelo 2D mostra que neste caso se acentua o comportamento 2D, ou seja, a condução na direção da espessura do vidro.

10.81 12.47 14.12 15.78 17.43 19.09 20.74 22.40 24.05 25.71 27.36 °C



13.04 14.71 16.38 18.04 19.71 21.38 23.05 24.72 26.38 28.05 29.72 °C



1.2 Condução em regime instacionário

Os sistemas térmicos reais funcionam em regime instacionário ou dinâmico, variando as temperaturas e fluxos de calor ao longo do tempo. Mesmo os sistemas concebidos para funcionar em condições quase permanentes enfrentam alterações no tempo, quando há modificação de alguma condição operativa, ou nas fases de arranque e paragem. A instacionariedade torna a resolução de problemas mais complicada, em particular quando a temperatura também varia em mais do que uma direção espacial.

Sob certas condições, que veremos de seguida, pode desprezar-se a variação de temperatura no interior do corpo (espacial), situação designada por sistema global. No caso geral teremos de considerar a variação temporal e espacial da temperatura, o que analisaremos em 1.2.2 e 1.2.3.

1.2.1 Sistema global

Diz-se que um corpo transfere calor ao longo do tempo como um sistema global quando a sua temperatura se considera uniforme em toda a sua extensão espacial. Tal não deixa de ser um paradoxo, porque sendo a temperatura uniforme não há condução do calor (o gradiente é nulo). Trata-se no entanto de uma simplificação cuja validade vamos analisar.

Considere-se o caso mais simples de um corpo, com volume V e qualquer forma, que se encontra inicialmente à temperatura T_i , transferindo calor por convecção na sua superfície em contacto com um fluido (a T_∞). Um balanço de energia expressa que a variação temporal da energia contida no corpo deverá igualar a potência calorífica trocada com o fluido. Ou seja:

$$\rho V c_p \frac{dT}{dt} = h A_{conv} (T_\infty - T) \quad (1.41)$$

Esta equação é facilmente integrada, sujeita à condição $T|_{t=0} = T_i$, resultando em

$$\frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \exp\left(-\frac{h A_{conv}}{\rho V c_p} t\right) \quad (1.42)$$

Note-se que a equação (1.42) é válida se o coeficiente h for constante, quer o corpo receba quer perca calor, e mostra que a temperatura do corpo tende para T_∞ (equilíbrio térmico), que matematicamente só atinge ao fim de um tempo infinito (exponencial igual a 0). O quociente $\rho V c_p / (h A_{conv})$ expressa a velocidade de variação da temperatura (resposta térmica), e é usualmente designado por constante de tempo do corpo; um maior valor significa que a temperatura varia mais lentamente.

Para analisar a variação de temperatura dentro do corpo consideremos que, durante um instante, a transferência de calor se dá em regime permanente. Podemos então associar 2 resistências térmicas: uma de convecção à superfície do corpo que troca calor com o fluido, e outra de condução no interior do corpo. Para esta consideremos uma espessura média igual a

$$L_c = \frac{V}{A_{conv}} \quad (1.43)$$

A razão entre a resistência de condução e a de convecção, que permite comparar a variação de temperatura no interior do corpo com a variação exterior, será

$$\frac{r_{cond}}{r_{conv}} = \frac{L_c/k}{1/h} = \frac{h L_c}{k} = Bi \quad (1.44)$$

razão adimensional conhecida por número de Biot. Para um valor elevado, ou seja r_{cond} elevado face a r_{conv} , $\Delta T_{cond} \gg \Delta T_{conv}$; para um valor muito baixo, $\Delta T_{cond} \ll \Delta T_{conv}$.

Verifica-se que se Bi for menor que 0,1 a variação de temperatura no interior do corpo (ΔT_{cond}) é desprezável, ou seja, podemos considerar o corpo como um sistema global. Tal é uma boa aproximação quando h é baixo (por exemplo para convecção natural em gases), quando a espessura é reduzida, ou quando a condutibilidade térmica do corpo é elevada (como nos metais).

Outros casos de sistema global podem ocorrer, como no caso de um corpo que recebe e perde calor simultaneamente em zonas/áreas diferentes. Nesses casos o balanço de energia expressa que a variação temporal da energia contida no corpo deverá igualar a potência calorífica recebida menos a perdida. Por exemplo, se o corpo receber uma potência \dot{Q}_{ent} do exterior (zona 1) e perder/trocar calor por convecção (zona 2), ter-se-á

$$\rho V c_p \frac{dT}{dt} = \dot{Q}_{ent} - h A_{conv} (T - T_{\infty}) \quad (1.45)$$

que tem a seguinte solução analítica:

$$\frac{T - T_{\infty} - \dot{Q}_{ent}/(h A_{conv})}{T_i - T_{\infty} - \dot{Q}_{ent}/(h A_{conv})} = \exp\left(-\frac{h A_{conv}}{\rho V c_p} t\right) \quad (1.46)$$

Pode ainda incluir-se em (1.45) e (1.46) a geração de calor no interior do corpo, bastando para isso somar $\dot{g}V$ a \dot{Q}_{ent} .

Outras situações podem ser consideradas, como as trocas de calor por convecção natural e radiação com o meio exterior ao corpo. O balanço energético do corpo é semelhante ao visto acima, mas os coeficientes de transferência dessas trocas são função da temperatura, o que complica o cálculo. Serão apresentados exemplos destas situações em problemas nos capítulos 2 e 6.

1.2.2 Condução monodimensional em placa, cilindro e esfera

Quando não se pode desprezar a variação interna da temperatura no corpo, a situação mais simples é aquela em que se pode admitir uma variação espacial unicamente numa direção. A variação em 2 ou 3 direções só pode ser tratada, no caso geral, com métodos numéricos (aproximados), o que será referido em 1.2.3. Para a variação 1D referem-se de seguida as geometrias e condições mais simples. Refere-se ainda a possibilidade de utilizar as soluções 1D para tratar alguns casos de 2D e até 3D.

Os casos 1D a considerar são a condução ao longo da espessura de uma placa (x), e ao longo do raio de um cilindro ou de uma esfera (r). Regressando à forma respetiva da equação geral da condução – equações (1.2) a (1.4) – teremos nestes casos monodimensionais e instacionários, e sem fontes de calor internas:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.47)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.48)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.49)$$

Pode obter-se uma solução analítica nestes 3 casos, desde que a condição inicial seja de temperatura uniforme no corpo, e desde que haja apenas trocas por convecção na superfície, com um coeficiente e temperatura exterior iguais em toda a extensão superficial, e constantes no tempo. Todos os restantes casos só podem ser resolvidos com métodos numéricos.

A Figura 1.11 ilustra as geometrias e condições a considerar.

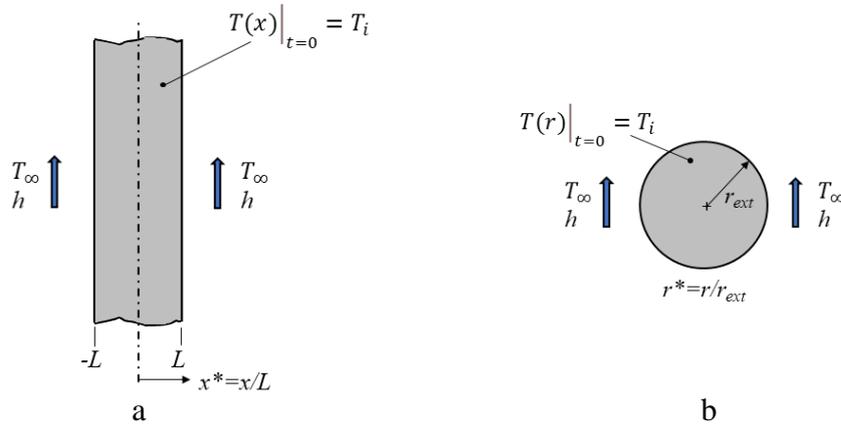


Figura 1.11 – Geometrias e condições para soluções analíticas de condução estacionária 1D: (a) placa plana; (b) cilindro ou esfera.

As soluções exigem a soma dos termos de uma série (em número infinito). No entanto, desde que o tempo adimensional não seja muito pequeno, o primeiro termo basta para uma solução muito próxima da exata, [1, 2]. O tempo adimensional, ou número de Fourier (Fo), define-se como

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} \quad \text{ou} \quad Fo = \frac{\alpha t}{r_{ext}^2} \quad (1.50)$$

sendo $\alpha = k/\rho/c_p$.

A solução é o produto de 2 funções: uma unicamente função do tempo (t) e outra unicamente função do espaço (x ou r). Desde que $Fo > 0,2$, as soluções para a temperatura em $x=0$ ou $r=0$ (centro do corpo) são do tipo:

$$\theta_0^* = \frac{\theta_0}{\theta_i} = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 \exp(-\lambda_1^2 Fo) \quad (1.51)$$

sendo T_0 a temperatura em $x=0$ ou $r=0$, e C_1 e λ_1 constantes do 1º termo da série (solução exata) que dependem da geometria e do número de Biot, e que podem ser obtidas da Tabela 1.1. Note-se que no caso do cilindro e da esfera se usa um número de Biot modificado, Bi' , definido com base no raio e não na equação (1.43) – L_c é diferente de r_{ext} .

Para o cálculo da temperatura noutros pontos, que não $x=0$ ou $r=0$, a forma das equações varia consoante a geometria. Para a placa, com $x^* = x/L$:

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \theta_0^* \cos(\lambda_1 x^*) \quad (1.52)$$

Para o cilindro, com $r^* = r/r_{ext}$:

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \theta_0^* J_0(\lambda_1 r^*) \quad (1.53)$$

sendo J_0 uma função de Bessel de 1º tipo e ordem 0 (que pode obter-se da Tabela 1.1).

Para a esfera:

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \theta_0^* \frac{1}{\lambda_1 r^*} \text{sen}(\lambda_1 r^*) \quad (1.54)$$

Tabela 1.1 – Constantes C_1 e λ_1 , e função de Bessel J_0 , para utilização em soluções 1D instacionárias.

$Bi = \frac{hL}{k}$ ou $Bi' = \frac{hr_{ext}}{k}$	placa		cilindro		esfera		λ	$J_0(\lambda)$
	λ_1 (rad)	C_1	λ_1 (rad)	C_1	λ_1 (rad)	C_1		
0.01	0.0998	1.0017	0.1412	1.0025	0.1730	1.0030	0.0	1.0000
0.02	0.1410	1.0033	0.1995	1.0050	0.2445	1.0060	0.1	0.9975
0.04	0.1987	1.0066	0.2814	1.0099	0.3450	1.0120	0.2	0.9900
0.06	0.2425	1.0098	0.3438	1.0148	0.4217	1.0179	0.3	0.9776
0.08	0.2791	1.0130	0.3960	1.0197	0.4860	1.0239	0.4	0.9604
0.1	0.3111	1.0161	0.4417	1.0246	0.5423	1.0298	0.5	0.9385
0.2	0.4328	1.0311	0.6170	1.0483	0.7593	1.0592	0.6	0.9120
0.3	0.5218	1.0450	0.7465	1.0712	0.9208	1.0880	0.7	0.8812
0.4	0.5932	1.0580	0.8516	1.0931	1.0528	1.1164	0.8	0.8463
0.5	0.6533	1.0701	0.9408	1.1143	1.1656	1.1441	0.9	0.8075
0.6	0.7051	1.0814	1.0184	1.1345	1.2644	1.1713	1.0	0.7652
0.7	0.7506	1.0918	1.0873	1.1539	1.3525	1.1978	1.1	0.7196
0.8	0.7910	1.1016	1.1490	1.1724	1.4320	1.2236	1.2	0.6711
0.9	0.8274	1.1107	1.2048	1.1902	1.5044	1.2488	1.3	0.6201
1.0	0.8603	1.1191	1.2558	1.2071	1.5708	1.2732	1.4	0.5669
2.0	1.0769	1.1785	1.5995	1.3384	2.0288	1.4793	1.5	0.5118
3.0	1.1925	1.2102	1.7887	1.4191	2.2889	1.6227	1.6	0.4554
4.0	1.2646	1.2287	1.9081	1.4698	2.4556	1.7202	1.7	0.3980
5.0	1.3138	1.2403	1.9898	1.5029	2.5704	1.7870	1.8	0.3400
6.0	1.3496	1.2479	2.0490	1.5253	2.6537	1.8338	1.9	0.2818
7.0	1.3766	1.2532	2.0937	1.5411	2.7165	1.8673	2.0	0.2239
8.0	1.3978	1.2570	2.1286	1.5526	2.7654	1.8920	2.1	0.1666
9.0	1.4149	1.2598	2.1566	1.5611	2.8044	1.9106	2.2	0.1104
10.0	1.4289	1.2620	2.1795	1.5677	2.8363	1.9249	2.3	0.0555
20.0	1.4961	1.2699	2.2880	1.5919	2.9857	1.9781	2.4	0.0025
30.0	1.5202	1.2717	2.3261	1.5973	3.0372	1.9898	2.6	-0.0968
40.0	1.5325	1.2723	2.3455	1.5993	3.0632	1.9942	2.8	-0.1850
50.0	1.5400	1.2727	2.3572	1.6002	3.0788	1.9962	3.0	-0.2601
100.0	1.5552	1.2731	2.3809	1.6015	3.1102	1.9990	3.2	-0.3202
∞	1.5708	1.2732	2.4048	1.6021	3.1416	2.0000		

Usando o princípio da sobreposição de soluções 1D, podem obter-se soluções para casos 2D e até 3D. Uma barra infinita de secção retangular, com condução nas 2 direções da secção (2D) pode ser descrita como a intersecção de 2 placas planas de área infinita – ver Figura 1.12(a). E um cilindro de comprimento finito pode ser descrito como a intersecção de um cilindro de comprimento infinito com uma placa plana infinita – ver Figura 1.12(b). Para o método ser aplicável exige que o coeficiente e temperatura exteriores sejam iguais em todas as superfícies do corpo.

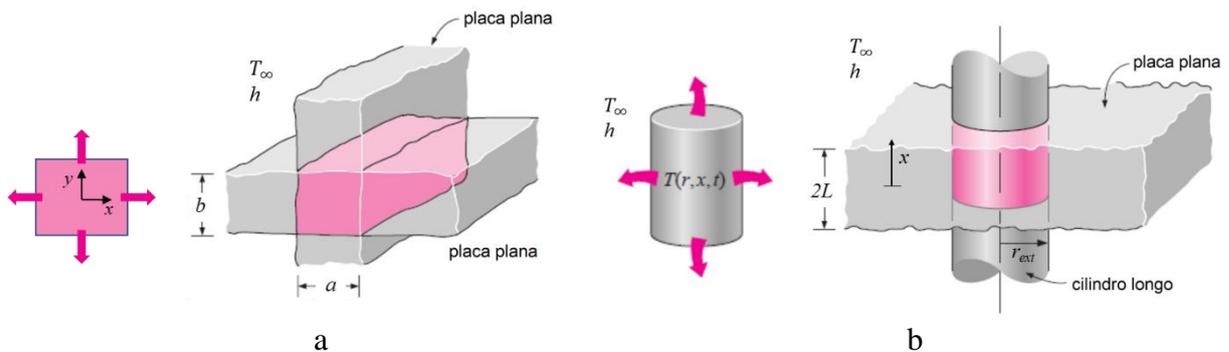


Figura 1.12 – Sobreposição de geometrias 1D: (a) barra infinita; (b) cilindro finito. Adaptado de [2].

Para a barra infinita a solução 2D pode obter-se com

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T(x,y,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty} = \theta_{placa}^*(x, t) \cdot \theta_{placa}^*(y, t) \quad (1.55)$$

e para o cilindro finito com

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T(x,r,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty} = \theta_{placa}^*(x, t) \cdot \theta_{cilindro}^*(r, t) \quad (1.56)$$

Também se pode obter a solução 3D para um paralelepípedo, interseção de 3 placas planas infinitas, através de

$$\theta^* = \frac{T(x,y,t)-T_\infty}{T_i-T_\infty} = \theta_{placa}^*(x, t) \cdot \theta_{placa}^*(y, t) \cdot \theta_{placa}^*(z, t) \quad (1.57)$$

1.2.3 Condução multidimensional instacionária (métodos numéricos)

Os métodos numéricos apresentados em 1.1.5 podem ser estendidos à situação instacionária. O domínio em estudo é dividido na mesma malha de nodos e elementos de volume referidos na altura. As equações a usar para cada nodo/elemento traduzem um balanço de energia ao longo do tempo.

Por exemplo, para um elemento de volume genérico (a meio do domínio 2D em causa), usando o método dos volumes finitos, a equação (1.38) é modificada para contabilizar a variação temporal da energia contida no elemento; com coordenadas cartesianas (geometria retangular da Figura 1.8a) ter-se-á

$$\begin{aligned} \rho c_p \Delta x \Delta y \frac{T_{i,j} - T_{i,j}^0}{\Delta t} &= \frac{k}{\Delta x} \Delta y (T_{i-1,j}^* - T_{i,j}^*) + \frac{k}{\Delta x} \Delta y (T_{i+1,j}^* - T_{i,j}^*) + \frac{k}{\Delta y} \Delta x (T_{i,j-1}^* - T_{i,j}^*) + \\ &+ \frac{k}{\Delta y} \Delta x (T_{i,j+1}^* - T_{i,j}^*) + \dot{q} \Delta x \Delta y \end{aligned} \quad (1.58)$$

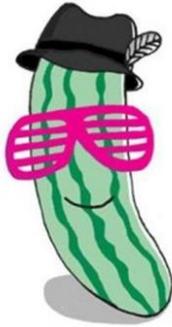
sendo $T_{i,j}^0$ a temperatura no elemento/nodo genérico no instante anterior, e $T_{i,j}$ a temperatura no mesmo elemento no instante seguinte. As várias temperaturas assinaladas com * variam durante Δt . Para contabilizar essas variações podem seguir-se aproximações mais simples ou mais complexas. As mais simples consistem em assumir que as temperaturas se mantêm durante Δt iguais às do instante anterior – método designado por explícito – ou que elas têm imediatamente os valores do instante seguinte – método implícito. Uma combinação dos dois métodos consiste em admitir para cada temperatura uma média aritmética das temperaturas nos 2 instantes consecutivos – método semi-implícito, ou de Crank-Nicolson. O método explícito torna a resolução do sistema de equações mais simples, mas por vezes conduz a problemas de convergência, devendo o passo de integração (Δt) ser limitado. Tal como para a discretização espacial (Δx e Δy), quanto mais pequenos os valores de Δt melhor a qualidade dos resultados.

O processo de cálculo consiste em resolver o sistema de equações das temperaturas para todos os nodos/elementos para cada instante. Conhecendo as temperaturas no instante t , parte-se para o cálculo em $t + \Delta t$, evoluindo-se no tempo.

O método pode ser generalizado também para 3D.

1.2.4 Problemas práticos resolvidos (P1.14 a P1.22)

P1.14



É usual dizer-se que o pepino é frio (“cucumber is cool”). Avalie a veracidade dessa afirmação, comparando o aquecimento de um pepino e de uma banana, com as mesmas dimensões, quando retirados do frigorífico a 5°C e colocados num ambiente a 20°C, com um coeficiente de transferência exterior de 5 W/m²K.

As dimensões são as de um cilindro aproximado, com 4 cm de diâmetro e 22 cm de comprimento. O pepino, composto por 96% de água, tem: $\rho=960 \text{ kg/m}^3$, $c_p=4100 \text{ J/kgK}$, $k=0,6 \text{ W/mK}$. A banana, composta por 75% de água, tem: $\rho=700 \text{ kg/m}^3$, $c_p=3350 \text{ J/kgK}$, $k=0,34 \text{ W/mK}$.

Resolução e discussão

Vamos admitir que cada uma das peças de fruta é geometricamente um cilindro, desprezando as trocas de calor nos topos. Avaliemos o número de Biot para cada um:

$$Bi_{pep} = \frac{h(V/A)}{k_{pep}} = \frac{5 \times 0,02/2}{0,6} = 0,083$$

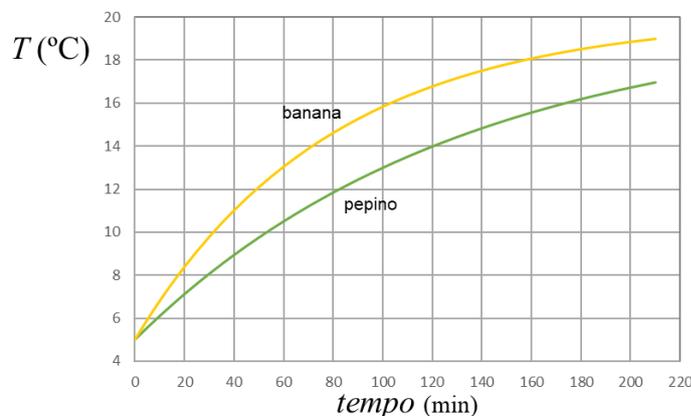
$$Bi_{ban} = \frac{h(V/A)}{k_{ban}} = \frac{5 \times 0,02/2}{0,34} = 0,147$$

O Bi para a banana é um pouco superior a 0,1, limite definido para a aproximação a sistema global. Prossegamos no entanto como se $Bi < 0,1$, aproximação que depois avaliaremos.

Para qualquer dos frutos usaremos então a equação (1.42):

$$\frac{T-20}{5-20} = \exp\left(-\frac{5}{0,01 \rho c_p} t\right)$$

O gráfico seguinte mostra a evolução da temperatura nos 2 casos. Nota-se o aquecimento (resposta térmica) mais rápido da banana, mantendo-se o pepino sempre mais frio. A banana atingirá 19°C ao fim de 210 minutos, enquanto o pepino demorará 355 minutos a atingir essa temperatura. Claro que ao fim de um tempo mais longo ficarão em equilíbrio à temperatura ambiente (20°C), não havendo diferença entre ambos. É na situação instacionária que o pepino é mais frio.



A massa do pepino é de 265 g e a da banana de 194 g. Mas o mais relevante para a resposta térmica é o produto $M c_p / (h A_{conv})$, ou seja, a constante de tempo: para o pepino é de 7872 s (2,2 horas) e para a banana de 4690 s (1,3 horas), tendo esta uma resposta mais rápida.

Analise agora o que se passa na banana quanto à variação espacial da temperatura, supondo-a como um cilindro infinito (topos isolados) com condução radial. Para tal, vamos calcular a temperatura no centro ($r=0$) e na superfície ($r=r_{ext}$) ao fim de 1 hora.

Nessa altura $Fo=1,305$, cumprindo a validade da equação (1.51), da qual obtemos

$$\frac{T_0-20}{5-20} = C_1 \exp(-\lambda_1^2 Fo) = 1,0698 \exp\left(-0,7396^2 \frac{1,450 \times 10^{-7} \times 3600}{0,02^2}\right) \Rightarrow T_0 = 12,1 \text{ }^\circ\text{C}$$

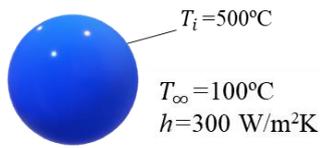
tendo C_1 e λ_1 sido calculados da Tabela 1.1 por interpolação, com $Bi' = hr_{ext}/k = 0,294$.

Quanto à temperatura na superfície, da equação (1.53) temos

$$\frac{T_{r_{ext}}-20}{5-20} = \theta_0^* J_0(\lambda_1 r_{ext}/r_{ext}) = 0,5239 \times 0,8679 = 0,4547 \Rightarrow T_0 = 13,2 \text{ }^\circ\text{C}$$

A temperatura difere cerca de 1°C entre o interior e o exterior. Recorde-se que com o método do sistema global a temperatura seria de $13,0^\circ\text{C}$ ao fim de 1 hora, o que constitui uma boa aproximação apesar do número de Biot ser um pouco maior que 0,1.

P1.15

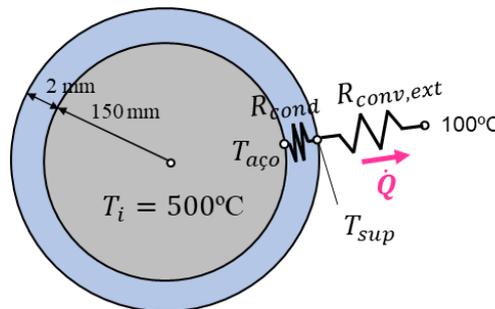


Uma esfera sólida de aço ($\rho=7800 \text{ kg/m}^3$, $c_p=560 \text{ J/kgK}$, $k=45 \text{ W/mK}$) com 300 mm de diâmetro é revestida com um material dielétrico (isolante elétrico), com $k=0,04 \text{ W/mK}$ e 2 mm de espessura. Quando o processo de revestimento termina o conjunto encontra-se a uma temperatura de 500°C.

A esfera revestida é depois colocada num banho de arrefecimento de óleo, a uma temperatura de 100°C, com um coeficiente de convecção de 300 W/m²K. Calcule o tempo necessário a que a esfera atinja 150°C. Calcule a energia que a esfera perde para o óleo durante o processo de arrefecimento. Calcule também o tempo necessário se o arrefecimento fosse feito com uma corrente de ar a 20°C, com um coeficiente de transferência de 100 W/m²K. Calcule ainda o tempo que a esfera demoraria a atingir os 150°C se não fosse revestida.

Resolução e discussão

Durante o processo de arrefecimento existe variação temporal das temperaturas no aço e no revestimento. No entanto, o revestimento tem uma capacidade térmica (espessura, massa e calor específico) muito baixa, e conseqüentemente uma constante de tempo muito baixa. Deste modo, pode considerar-se que o revestimento se comporta em regime permanente em cada instante, variando continuamente de instante a instante. Pode então tratar-se a transferência de calor através do revestimento e da convecção exterior com a já conhecida associação de resistências. A figura seguinte resume a análise.



Começamos por verificar a validade da análise da esfera de aço como sistema global. O número de Biot deverá ser avaliado com o coeficiente global de transferência do aço para o exterior, que se obtém da resistência global:

$$Bi_{aço} = \frac{U(V/A)_{aço}}{k_{aço}} = \frac{1/(r_{cond}+r_{conv,ext}) \times r_{aço}/3}{k_{aço}} = \frac{1/((\frac{0,002}{0,04} + \frac{1}{300}) \times 0,15/3)}{45} = 0,0208$$

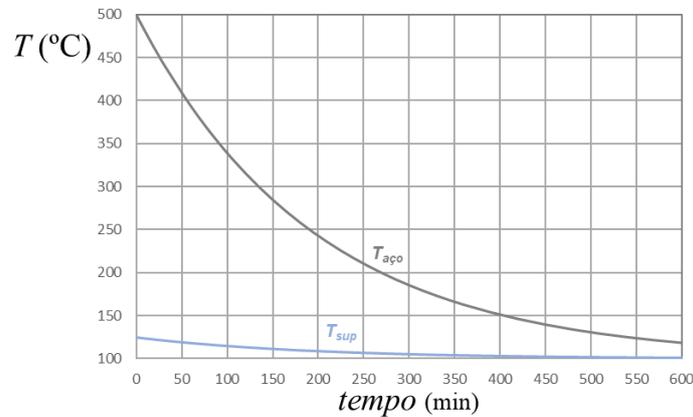
desprezando a pequena curvatura do revestimento (tratado como placa plana). Está confirmada a validade da análise como sistema global.

Pode então obter-se o tempo necessário a atingir 150°C na esfera, pela equação (1.42):

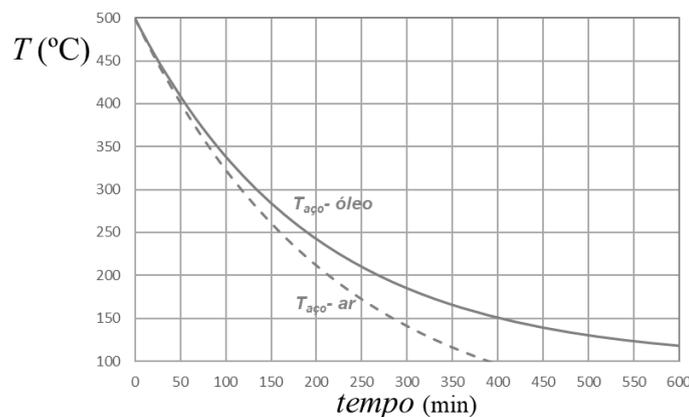
$$\frac{150-100}{500-100} = \exp\left(-\frac{U}{r_{aço}/3 (\rho c_p)_{aço}} t\right) = \exp\left(-\frac{18,75}{\frac{0,15}{3} \times 7800 \times 560} t\right) \Rightarrow t = 24221 \text{ s}$$

ou seja 6,72 horas. Note-se que entre as 2 resistências (condução no revestimento e convecção exterior) a que condiciona mais o tempo de arrefecimento é a de condução (representa 94% do total); assim, aumentar a convecção exterior não acelera significativamente o arrefecimento.

O gráfico seguinte representa a evolução de temperatura na esfera (aço) e na superfície exterior (revestimento) ao longo do tempo. Para a temperatura do aço usou-se a equação de anterior, obtendo-se T_{sup} a partir da igualdade de \dot{Q} nas 2 resistências em cada instante (regime permanente ou quasi-estacionário). A superfície exterior do revestimento rapidamente tende para a T_{ext} .



Se o arrefecimento fosse feito com uma corrente de ar a 20°C , com um coeficiente de transferência de $100\text{ W/m}^2\text{K}$, o coeficiente seria 3 vezes menor, mas sem grande influência devido à resistência do revestimento já vista. Já a menor temperatura do fluido (20 em vez de 100°C) facilitaria o arrefecimento. Repetindo os cálculos anteriores para este caso, obtém-se a evolução de temperatura do gráfico seguinte, que está comparada com a do arrefecimento em óleo. Com o ar a 20°C o número de Biot é de $0,0185$ (o coeficiente U é ligeiramente mais baixo) e são necessários 17117 s ($4,8$ horas) para atingir os 150°C .



Quanto à energia perdida pela esfera até atingir os 150°C , calcula-se muito facilmente a partir da variação da energia nela contida desde o instante inicial, ou seja

$$Q = \rho V c_p \Delta T = 7800 \times \frac{4}{3} \pi \times 0,15^3 \times 560(500 - 150) = 21,6\text{ MJ}$$

Poderia obter-se o mesmo resultado a partir da soma das potências caloríficas dissipadas ao longo do tempo, o que no entanto seria mais complicado.

Se a esfera não fosse revestida, o número de Biot durante o arrefecimento com óleo seria igual a $0,333$ (maior que $0,1$), o que indica uma variação radial não desprezável da sua temperatura. Vamos calcular o tempo necessário a que toda a esfera atinja os 150°C , ou seja, o tempo

necessário a que o seu centro ($r=0$) fique a 150°C . Usando a equação (1.51) e a Tabela 1.1 (com $Bi'_{aço} = h r_{aço} / k_{aço} = 1$):

$$\frac{150-100}{500-100} = C_1 \exp(-\lambda_1^2 Fo) = 1,2732 \exp\left(-1,5708^2 \frac{1,030 \times 10^{-5} t}{0,15^2}\right) \Rightarrow t = 2055 \text{ s}$$

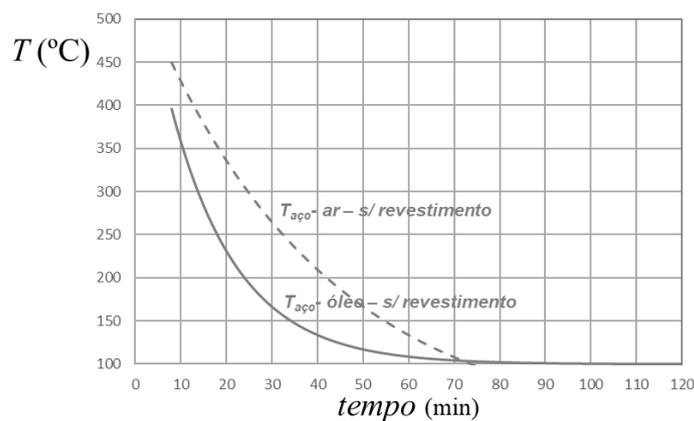
tempo muito inferior ao da esfera quando revestida (34 min em vez de 6,72 horas).

Com a equação (1.54) podemos calcular a temperatura na superfície da esfera (não revestida) quando o centro está a 150°C :

$$\frac{T_{r_{aço}} - 100}{500 - 100} = \theta_0^* \frac{1}{\lambda_1 r^*} \text{sen}(\lambda_1 r^*) = 0,125 \times \frac{1}{1,5708 \times 1} \times \text{sen}(1,5708) \Rightarrow T_{r_{aço}} = 131,8 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

existindo agora uma diferença de cerca de 18°C entre o centro e a superfície da esfera.

O gráfico seguinte mostra a evolução de temperatura do centro da esfera não revestida, comparada com o que aconteceria se o arrefecimento fosse feito com ar a 20°C ($Bi' = 0,333$). O arrefecimento é muito mais rápido, quer com óleo, quer com ar, e não havendo revestimento o arrefecimento até 150°C a óleo é mais rápido que a ar, ao contrário do que acontecia com a esfera revestida. A partir dos 70 minutos as 2 curvas cruzam-se, porque devido à menor temperatura do ar (20°C em vez de 100°C) existe um maior potencial para a transferência de calor.



P1.16

Uma esfera de aço ($\rho=7800 \text{ kg/m}^3$, $c_p=560 \text{ J/kgK}$, $k=45 \text{ W/mK}$) com 12 mm de diâmetro, é mergulhada num banho de água à temperatura de 25°C . Através de medição sabe-se que ao fim de 30 s (da colocação em água) a temperatura da esfera é de $28,2^\circ\text{C}$, e ao fim de 60 s a temperatura é de $25,1^\circ\text{C}$. Calcule a temperatura inicial da esfera e o coeficiente de convecção.

Resolução e discussão

Tendo em conta as propriedades e dimensões da esfera, vamos admitir que pode ser tratada como um sistema global, o que será depois verificado.

Poderemos então usar a equação (1.42), para cada um dos instantes em que foi medida a temperatura:

$$\frac{28,2-25}{T_i-25} = \exp\left(-\frac{h}{r_{ext}/3 \rho c_p} t_1\right) = \exp\left(-\frac{h}{0,006/3 \times 7800 \times 560} \times 30\right)$$

$$\frac{25,1-25}{T_i-25} = \exp\left(-\frac{h}{r_{ext}/3 \rho c_p} t_2\right) = \exp\left(-\frac{h}{0,006/3 \times 7800 \times 560} \times 60\right)$$

Da resolução deste sistema de 2 equações obtêm-se T_i e h , vindo

$$T_i = 127,4 \text{ }^\circ\text{C}$$

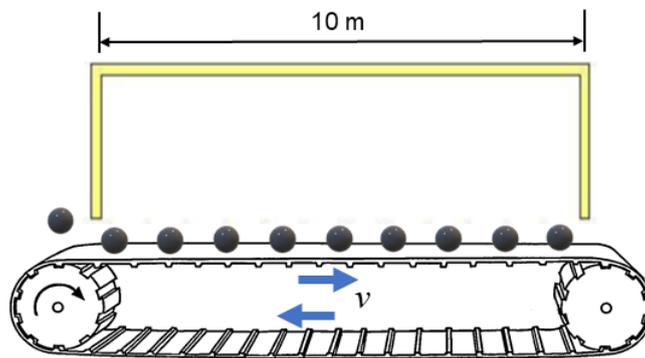
$$h = 1009 \text{ W/m}^2\text{ }^\circ\text{C}$$

Saliente-se que se supõe o coeficiente de convecção para a água (h) constante no tempo, o que é razoável no caso da convecção forçada. Se h variar, como no caso da convecção natural, a equação (1.42) não é válida.

Podemos agora verificar a validade do sistema global, calculando

$$Bi = \frac{h(V/A)}{k} = \frac{1009 \times 0,006/3}{45} = 0,045 < 0,1$$

P1.17



A câmara de arrefecimento da figura é usada para arrefecer esferas de rolamentos, com um raio de 2 cm, a uma temperatura de entrada de 100°C. O ar da câmara é mantido a -15°C, por um sistema de refrigeração, e as esferas atravessam a câmara (com um comprimento de 10 m) pousadas numa correia transportadora, devendo sair à temperatura de 50°C.

Sabendo que o coeficiente de transferência de calor das esferas está relacionado com a velocidade destas, de acordo com a expressão $h = 350v^{0,6}$, com v em m/s e h em W/m²K, calcule a velocidade que deve ter a correia (v).

Propriedades das esferas: $\rho=5500 \text{ kg/m}^3$, $c_p=450 \text{ J/kgK}$, $k=50 \text{ W/mK}$.

Resolução e discussão

Vamos admitir que as esferas podem ser consideradas a temperatura uniforme em cada instante (sistema global), tendo em conta as suas propriedades e dimensões. Isso poderá ser verificado após cálculo de v e de h , que não são conhecidos.

As esferas entram a 100°C (temperatura inicial), devendo sair a 50°C (temperatura ao fim do tempo de permanência na câmara, a -15°C). O tempo de permanência depende da velocidade e do comprimento da câmara. Aplicando a equação (1.42):

$$\frac{50-(-15)}{100-(-15)} = \exp\left(-\frac{h}{r_{ext}/3 \rho c_p} t\right) = \exp\left(-\frac{350v^{0,6}}{0,02/3 \times 5500 \times 450} \times \frac{10}{v}\right)$$

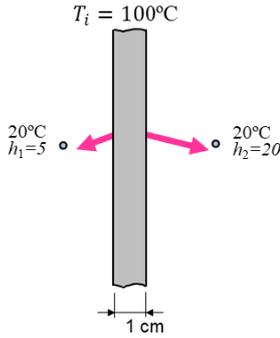
Obtém-se da equação uma velocidade $v = 0,084 \text{ m/s}$. O coeficiente de transferência vem igual a 79 W/m²°C.

Pode então agora calcular-se o número de Biot:

$$Bi = \frac{h(V/A)}{k} = \frac{79 \times 0,02/3}{50} = 0,01 < 0,1$$

o que confirma a validade do sistema global.

P1.18



Uma placa de aço inox ($\rho=8055 \text{ kg/m}^3$, $c_p=480 \text{ J/kgK}$, $k=15 \text{ W/m}^\circ\text{C}$) com uma espessura de 1 cm está inicialmente à temperatura de 100°C e será arrefecida pelas 2 faces. De um lado existe ar exterior a 20°C , com um coeficiente de transferência de $5 \text{ W/m}^2\text{C}$, e do outro lado o ar (também a 20°C) circula com maior velocidade, sendo o coeficiente de $20 \text{ W/m}^2\text{C}$. Analise a evolução da temperatura da placa.

Resolução e discussão

A placa transfere calor em 2 faces (desprezando as trocas pelos topos) em regime instacionário, com coeficientes diferentes em cada face. Para análise como sistema global vamos avaliar o número de Biot. A espessura característica da placa é igual a metade da espessura, pois há convecção nos 2 lados (saída de calor). Quanto ao coeficiente de convecção ou transferência superficial, considera-se o maior dos 2 (mais desfavorável), vindo:

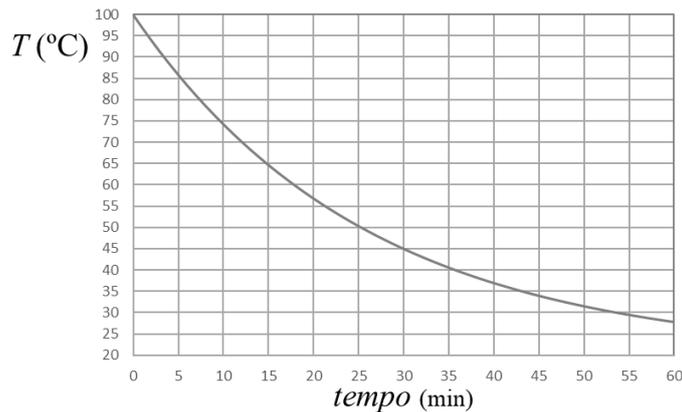
$$Bi = \frac{h_{\text{maior}} e/2}{k} = \frac{20 \times 0,01/2}{15} = 0,0067 < 0,1$$

pelo que vamos considerar a placa como um sistema global.

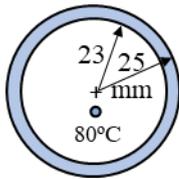
Quanto à variação da temperatura podem adaptar-se as equações (1.41) e (1.42), de modo a contabilizar a transferência com coeficientes diferentes nas 2 faces (1 e 2):

$$\frac{T-20}{100-20} = \exp\left(-\frac{(h_1+h_2)A_s}{\rho c_p e A_s} t\right) = \exp\left(-\frac{20+5}{8055 \times 480 \times 0,01} t\right)$$

O gráfico seguinte representa a equação anterior, e a variação de temperatura ao longo do tempo. Ao fim de 30 minutos a placa atinge 45°C , e ao fim de 60 minutos $27,8^\circ\text{C}$.



P1.19

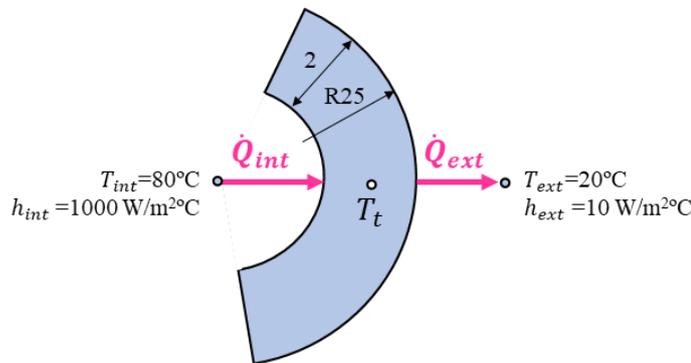


• 20°C

Um tubo de aço inox ($\rho=8055 \text{ kg/m}^3$, $c_p=480 \text{ J/kgK}$, $k=15 \text{ W/m}^\circ\text{C}$) está inicialmente à temperatura do ar exterior de 20°C. A partir desse instante passa a circular água no seu interior à temperatura de 80°C. Sabe-se que o coeficiente de convecção interior (água) é igual a 1000 $\text{W/m}^2\text{C}$, e no exterior o coeficiente é de 10 $\text{W/m}^2\text{C}$. Analise a evolução da temperatura do tubo até atingir o regime permanente.

Resolução e discussão

Ao iniciar-se a circulação de água o tubo passa a receber calor desta, e a perder calor para o exterior (pois a sua temperatura vai subir). A temperatura do tubo vai variar ao longo do tempo, devido à inércia térmica do material. Vamos admitir que a temperatura da água se mantém ao longo de todo o comprimento do tubo. A figura seguinte esquematiza o problema.



Começamos por avaliar a variação espacial da temperatura no tubo. Para tal vamos calcular um número de Biot, mas, tendo em conta que o calor atravessa toda a espessura do tubo, vamos usar a resistência de condução cilíndrica correspondente à espessura da parede a dividir pela menor resistência de convecção (que corresponde ao interior). Usar uma dimensão característica igual ao volume dividido pela área (interior mais exterior) subestimaria a variação e não seria correto, uma vez que a transferência de calor para o tubo não se dá no mesmo sentido no interior (positiva) e no exterior (negativa). Então temos

$$Bi = \frac{R_{cond}}{R_{conv,int}} = \frac{\ln(25/23)}{2\pi \times 15} \times 1000 \times 2\pi \times 0,023 = 0,128 > 0,1$$

Note-se que uma avaliação com a resistência de convecção exterior daria um valor de 0,00128, muito inferior a 0,1. Neste caso, e em regime permanente, dá-se uma variação mais significativa de temperatura entre o tubo e o exterior (maior resistência) do que entre o tubo e o interior. De qualquer modo a aproximação a sistema global para a parede do tubo é bastante razoável, mesmo com $Bi = 0,128$. Para o caso do regime permanente podemos calcular as temperaturas das paredes interior e exterior, que são $T_{p,int} = 79,4^\circ\text{C}$ e $T_{p,ext} = 79,3^\circ\text{C}$, diferindo apenas em 0,1°C.

Então podemos fazer um balanço global do tubo:

$$\begin{aligned} \rho V c_p \frac{dT}{dt} &= \dot{Q}_{int} - \dot{Q}_{ext} = h_{int} A_{int} (T_{int} - T) - h_{ext} A_{ext} (T - T_{ext}) = \\ &= (h_{int} A_{int} T_{int} + h_{ext} A_{ext} T_{ext}) - (h_{int} A_{int} + h_{ext} A_{ext}) T \end{aligned}$$

que, definindo as constantes

$$a = \frac{h_{int}A_{int}T_{int} + h_{ext}A_{ext}T_{ext}}{\rho V c_p} \quad \text{e} \quad b = \frac{h_{int}A_{int} + h_{ext}A_{ext}}{\rho V c_p}$$

tem a seguinte solução analítica:

$$\frac{a - bT}{a - bT_i} = \exp(-b t)$$

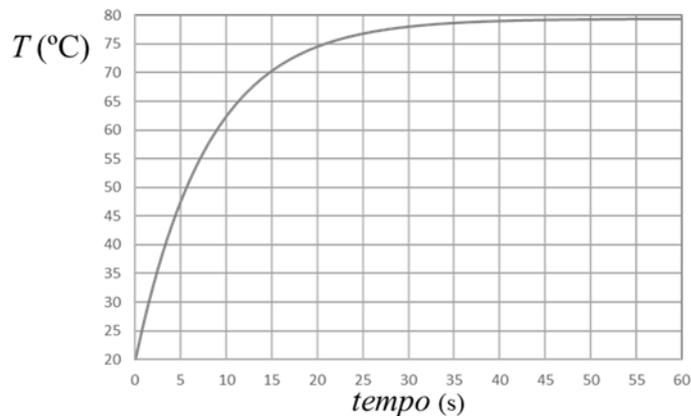
que se pode também escrever na forma mais desenvolvida:

$$T = T_i \exp\left(-\frac{h_{int}A_{int} + h_{ext}A_{ext}}{\rho V c_p} t\right) + \frac{h_{int}A_{int}T_{int} + h_{ext}A_{ext}T_{ext}}{h_{int}A_{int} + h_{ext}A_{ext}} \left[1 - \exp\left(-\frac{h_{int}A_{int} + h_{ext}A_{ext}}{\rho V c_p} t\right)\right]$$

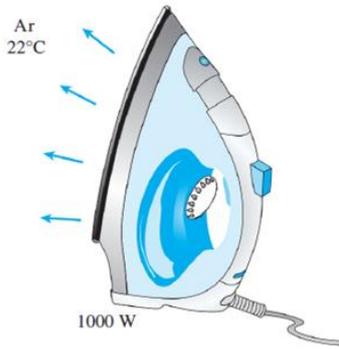
Substituindo os valores dados, obtém-se para este caso:

$$T = 20 \exp(-0,1253 t) + 79,4 [1 - \exp(-0,1253 t)]$$

O gráfico seguinte representa a evolução da temperatura do tubo ao longo do tempo. Note-se a rápida subida de temperatura, que ao fim de 30 s já é de 78°C. Em regime permanente a temperatura é de 79,4°C. Note-se que a água perde calor para o exterior (93 W/m em regime permanente), pelo que a sua temperatura irá baixar ligeiramente ao longo do comprimento do tubo, o que não foi considerado (veremos no capítulo 2 como contabilizar esse facto).



P1.20

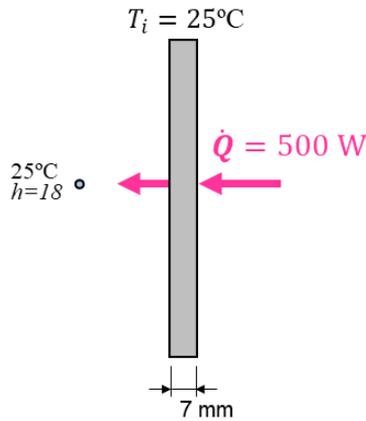


A base de um ferro de engomar é uma placa com uma espessura de 7 mm e uma área de 0,040 m², feita em liga de alumínio ($\rho=2800$ kg/m³, $c_p=900$ J/kgK, $k=180$ W/m²K). Tem uma resistência elétrica ligada à superfície interior da base, que lhe fornece uma potência de 500 W. A superfície exterior da base está em contacto com ar exterior a 25°C, transferindo calor com um coeficiente de 18 W/m²°C.

Calcule o tempo necessário a que, após ligado, o ferro atinja a temperatura de 135°C.

Resolução e discussão

Trata-se de um problema de condução instacionária numa placa, que se pode considerar 1D, devido à reduzida espessura e dimensão dos topos. A placa recebe uma potência constante numa face e troca calor (potência variável) na outra. A figura seguinte resume a situação.



Vamos confirmar a possibilidade de considerar a placa como um sistema global. O número de Biot basear-se-á na espessura da placa, e é:

$$Bi = \frac{h e}{k} = \frac{18 \times 0,007}{180} = 0,0007 < 0,1$$

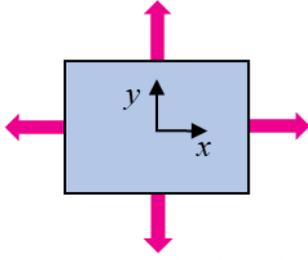
Então podemos considerar válidas as equações (1.45) e (1.46), quando um corpo recebe uma dada potência calorífica e transfere também calor com o exterior. Daí resulta:

$$\frac{T - 25 - \dot{Q}/(hA)}{25 - 25 - \dot{Q}/(hA)} = \exp\left(-\frac{hA_{conv}}{\rho V c_p} t\right)$$

$$\frac{135 - 25 - 500/(18 \times 0,04)}{25 - 25 - 500/(18 \times 0,04)} = \exp\left(-\frac{18 \times 0,04}{2800 \times 0,04 \times 0,007 \times 900} t\right)$$

sendo então necessários 169 s (2,8 min) para a base atingir os 135°C.

No caso de a base ser feita em aço inox ($\rho=8055$ kg/m³, $c_p=480$ J/kgK, $k=15$ W/m°C), e com as mesmas dimensões, a condutibilidade térmica seria mais de 10 vezes inferior. O número de Biot continuaria a ser <0,1. Nesse caso, o tempo necessário para atingir os mesmos 135°C seria de 259 s (4,3 min); a maior densidade/massa é a principal responsável por esse aumento. Para se conseguir o aumento de temperatura até 135°C no mesmo intervalo de tempo (169 s), seria necessário aumentar a potência do ferro para 745 W.

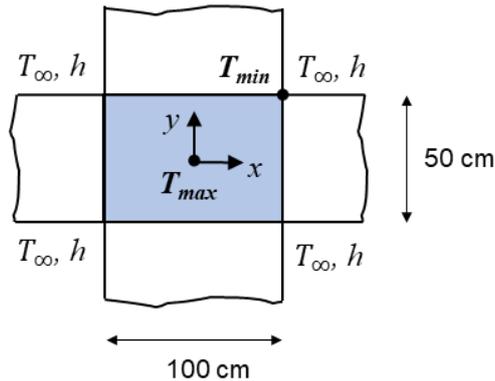
P1.21


Uma barra longa de aço inox ($\rho=8055 \text{ kg/m}^3$, $c_p=480 \text{ J/kgK}$, $k=15 \text{ W/m}^\circ\text{C}$), com uma secção retangular de $1 \text{ m} \times 0,5 \text{ m}$, inicialmente à temperatura uniforme de 200°C , passa a transferir calor para o exterior a 20°C , com um coeficiente superficial de $10 \text{ W/m}^2\text{C}$, igual em todas as faces.

Calcule a temperatura máxima e mínima na secção ao fim de 4 horas com o método de sobreposição de soluções 1D, e avalie o esforço necessário ao cálculo da potência dissipada para o exterior nesse instante.

Resolução e discussão

Trata-se de um problema de condução instacionária 2D (não há variação de temperatura na direção perpendicular à folha do desenho). Pelo método de sobreposição de soluções vamos considerar que se trata da sobreposição de 2 casos 1D de placas com área infinita nas outras direções, como representa a figura abaixo. Os eixos x e y serão definidos a partir do centro da secção, para tirar partido da solução 1D, em que cada placa tem espessura $2L$ e condições simétricas dos 2 lados (Figura 1.11). Note-se que o método de sobreposição só é válido para igual condição de temperatura exterior e coeficiente de transferência (h) nas 4 fronteiras.



Após o instante inicial, em cada instante a temperatura máxima verificar-se-á no centro da secção (origem dos eixos x e y) e a mínima nos 4 cantos. Vamos começar por calcular a temperatura no centro.

Considerando as 2 placas (placa x e placa y), podemos escrever a relação já apresentada na equação (1.55)

$$\theta_{centro}^* = \frac{\theta_{centro}}{\theta_i} = \frac{T(0,0,t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \theta_{placa\ x}^*(x=0, t) \cdot \theta_{placa\ y}^*(y=0, t)$$

Para cada uma das placas teremos, em $x=0$ ou $y=0$ (com $Fo > 0,2$):

$$\theta_{placa\ x}^*(x=0, t) = C_{1,x} \exp(-\lambda_{1,x}^2 Fo_x), \text{ com } L_x = 0,50, Fo_x = \frac{\alpha t}{L_x^2} \text{ e } Bi_x = \frac{hL_x}{k}$$

$$\theta_{placa\ y}^*(y=0, t) = C_{1,y} \exp(-\lambda_{1,y}^2 Fo_y), \text{ com } L_y = 0,25, Fo_y = \frac{\alpha t}{L_y^2} \text{ e } Bi_y = \frac{hL_y}{k}$$

Sendo, com auxílio da Tabela 1.1:

$$Fo_x = 0,223, Bi_x = 0,333, \lambda_{1,x} = 0,5456, C_{1,x} = 1,0493$$

$$Fo_y = 0,894, Bi_y = 0,167, \lambda_{1,y} = 0,3961, C_{1,y} = 1,0262$$

vem então:

$$\theta_{placa\ x}^*(x = 0, 14400\ s) = 0,9819$$

$$\theta_{placa\ y}^*(y = 0, 14400\ s) = 0,8919$$

$$\theta_{centro}^* = \frac{T(0,0,14400\ s) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = 0,9819 \times 0,8919 = 0,8758$$

$$T(0,0,14400\ s) = 177,6\ ^{\circ}\text{C}$$

Quanto à temperatura num canto, teremos:

$$\theta_{canto}^* = \frac{\theta_{canto}}{\theta_i} = \frac{T(0,50;0,25;t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \theta_{placa\ x}^*(x = 0,50, t) \cdot \theta_{placa\ y}^*(y = 0,25, t)$$

com

$$\theta_{placa\ x}^*(x = 0,50, t) = \theta_{placa\ x}^*(x = 0, t) \cos(\lambda_{1x}x^*)$$

$$\theta_{placa\ y}^*(y = 0,25, t) = \theta_{placa\ y}^*(y = 0, t) \cos(\lambda_{1y}y^*)$$

Como no canto x^* e y^* são iguais a 1 (máximo x e máximo y), vêm

$$\theta_{placa\ x}^*(x = 0,50; 14400) = 0,9819 \cos(0,5456 \times 1) = 0,8393$$

$$\theta_{placa\ y}^*(y = 0,25; 14400) = 0,8919 \cos(0,3961 \times 1) = 0,8228$$

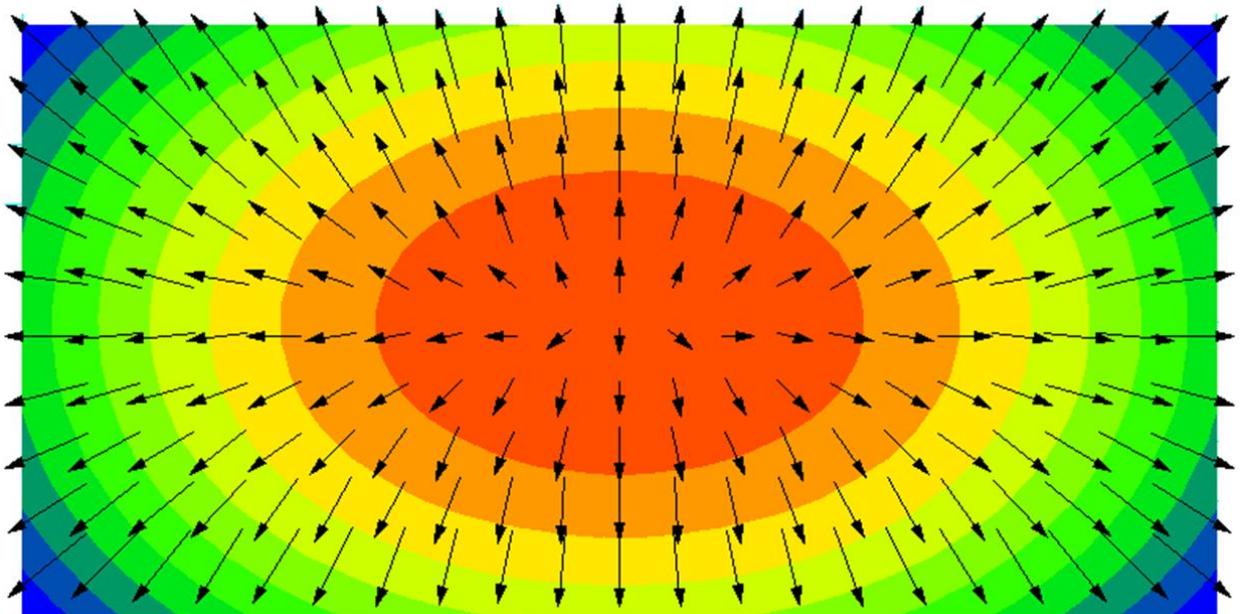
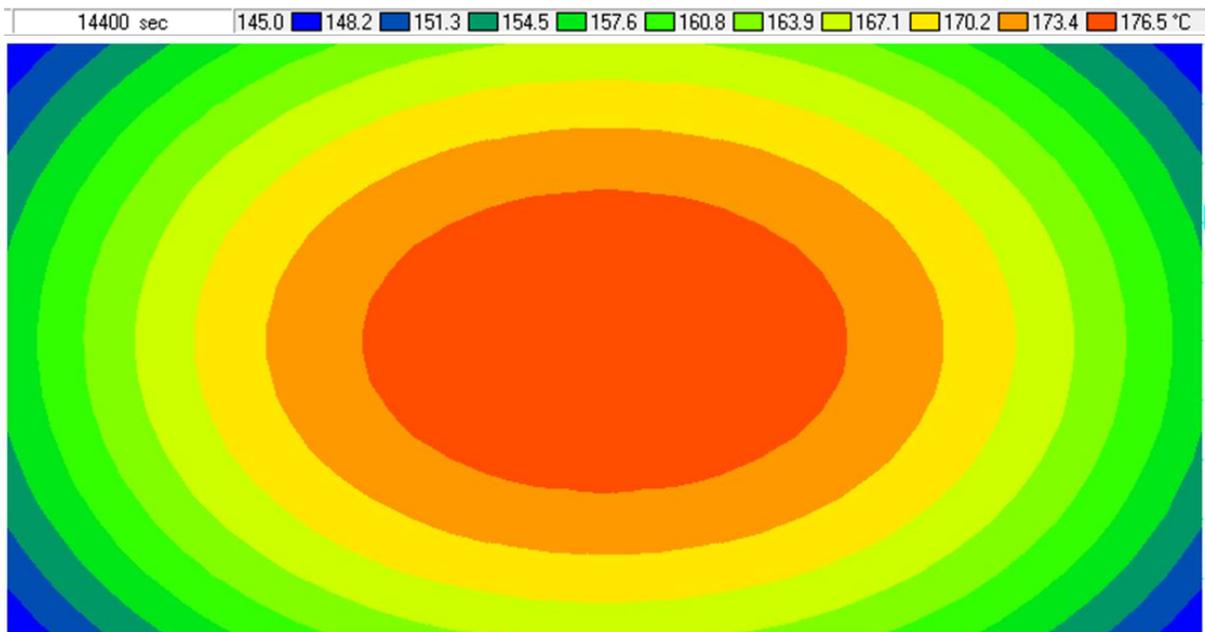
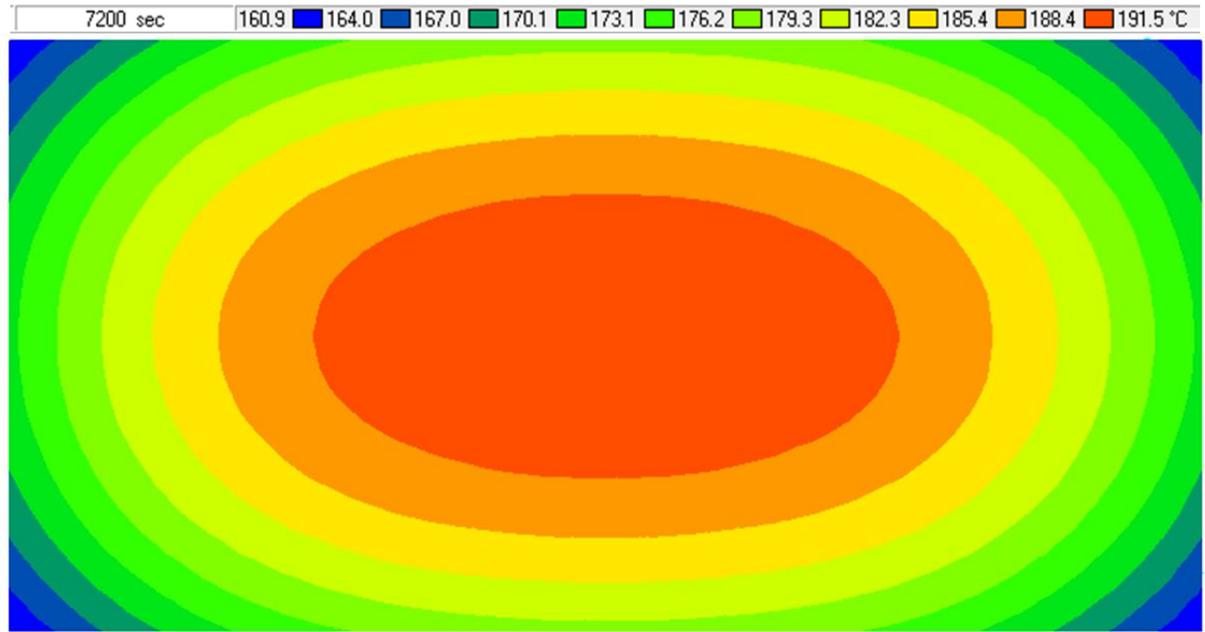
$$\theta_{canto}^* = \frac{T(0,5;0,25;14400) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = 0,8393 \times 0,8228 = 0,6906$$

$$T(0,50; 0,25; 14400) = 144,3\ ^{\circ}\text{C}$$

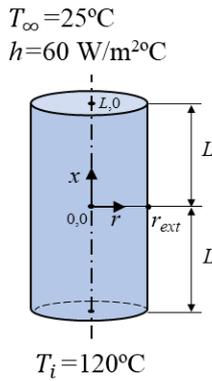
Existe então, ao fim de 4 horas, uma diferença de cerca de 33°C entre a temperatura máxima e a mínima.

Se pretendessemos calcular a potência calorífica dissipada para o exterior seria necessário calcular a temperatura em todos/muitos pontos das fronteiras da secção, e somar os fluxos nesses pontos, de modo a obter a potência total. Não é, portanto, uma tarefa simples, seguindo o método de cálculo visto. Tal é na prática mais simples depois de aplicar um método numérico para calcular a distribuição de temperatura 2D na peça ao longo do tempo. Como em cada instante se obtêm as temperaturas em muitos pontos da peça, incluindo nas fronteiras, a partir dessas temperaturas é possível calcular os vários fluxos e somá-los para obter a potência total em cada instante. Um método numérico pode também ser aplicado quando há condições diferentes nas fronteiras, como temperaturas ou coeficientes diferentes, e até variáveis no tempo.

De seguida apresentam-se resultados da aplicação do método de elementos finitos ao problema visto, com representação da distribuição de temperatura em 2 instantes de tempo, ao fim de 2 horas e ao fim de 4 horas (neste caso, também representados os vetores fluxo de calor). Foram considerados 545 nodos na secção da barra. Foi usado um passo de integração de 1 minuto. Note-se que os resultados reproduzem os valores calculados para a temperatura máxima e mínima ao fim de 4 horas, a menos de 1°C . A partir dos resultados calcula-se uma potência dissipada ao fim de 4 horas de 4081 W por metro de profundidade da barra.



P1.22



Um cilindro de bronze de 10 cm de diâmetro e 12 cm de altura está inicialmente a 120°C , e depois transfere calor para ar a 25°C , com um coeficiente de transferência igual a $60 \text{ W/m}^2\text{C}$ em todas as faces. As suas propriedades são: $k = 110 \text{ W/m}^{\circ}\text{C}$, $\alpha = 33,9 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Usando o método de sobreposição de soluções 1D, calcule a temperatura no centro do cilindro e no centro da superfície superior ao fim de 15 minutos.

Resolução e discussão

Trata-se de um problema de condução instacionária 2D: há variação radial da temperatura e ao longo do eixo do cilindro, não variando circunferencialmente. Pelo método de sobreposição de soluções vamos considerar que se trata da sobreposição de 2 casos 1D: uma placa de área infinita com espessura igual à altura do cilindro ($2L$), e um cilindro de altura infinita de 10 cm de diâmetro. Os eixos x e r serão definidos a partir do centro do cilindro, para tirar partido das soluções 1D, em que a placa tem espessura $2L$ e condições simétricas dos 2 lados e o cilindro tem $r=0$ no eixo.

Note-se que o método de sobreposição só é válido para igual condição de temperatura exterior e coeficiente de transferência (h) em todas as fronteiras.

Pelo método de sobreposição podemos escrever:

$$\theta_{0,0,t}^* = \frac{\theta_{0,0,t}}{\theta_i} = \frac{T(0,0,t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \theta_{placa}^*(x = 0, t) \cdot \theta_{cilindro \infty}^*(r = 0, t)$$

Para a placa e o cilindro teremos, em $x=0$ e $r=0$ (desde que $Fo > 0,2$):

$$\theta_{placa}^*(x = 0, t) = C_{1,x} \exp(-\lambda_{1,x}^2 Fo_x), \text{ com } L_x = 0,06, Fo_x = \frac{\alpha t}{L_x^2} \text{ e } Bi_x = \frac{hL_x}{k}$$

$$\theta_{cil \infty}^*(r = 0, t) = C_{1,r} \exp(-\lambda_{1,r}^2 Fo_r), \text{ com } r_{ext} = 0,05, Fo_r = \frac{\alpha t}{r_{ext}^2} \text{ e } Bi_r = \frac{hr_{ext}}{k}$$

Temos

$$Fo_x = 8,475, Bi_x = 0,0327, \lambda_{1,x} = 0,1776, C_{1,x} = 1,0050$$

$$Fo_r = 12,204, Bi_r = 0,0273, \lambda_{1,r} = 0,2294, C_{1,r} = 1,0068$$

com os coeficientes λ_1 e C_1 obtidos a partir da Tabela 1.1.

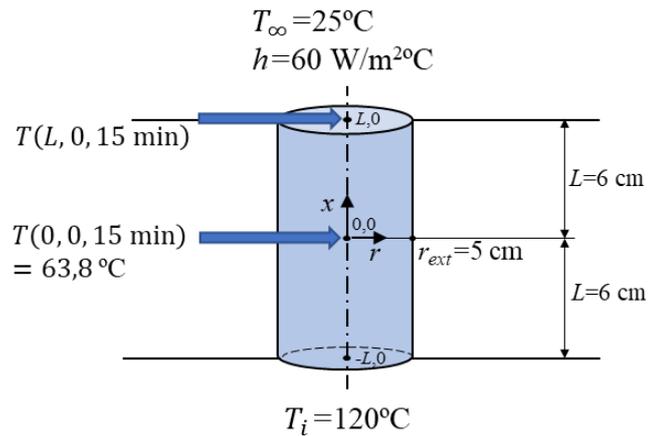
Vem então:

$$\theta_{placa}^*(x = 0, 15 \text{ min}) = 1,0050 \exp(-0,1776^2 \times 8,475) = 0,769$$

$$\theta_{cilindro \infty}^*(r = 0, 15 \text{ min}) = 1,0068 \exp(-0,2294^2 \times 12,204) = 0,530$$

$$\theta_{0,0,t}^* = \frac{T(0,0,15 \text{ min}) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = 0,769 \times 0,530 = 0,408$$

$$T(0,0,15 \text{ min}) = 25 + (120 - 25) \times 0,408 = 63,8^{\circ}\text{C}$$



Quanto à temperatura no centro da superfície superior (ver figura anterior), teremos:

$$\theta_{L,0,t}^* = \frac{\theta_{L,0,t}}{\theta_i} = \frac{T(0,06;0;t) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \theta_{placa}^*(x = 0,06, t) \cdot \theta_{cilindro \infty}^*(r = 0, t)$$

com

$$\begin{aligned} \theta_{placa}^*(x = 0,06, t) &= \theta_{placa}^*(x = 0, t) \cos(\lambda_{1x} x^*) = \\ &= 0,769 \cos(0,1776 \times 1) = 0,757 \end{aligned}$$

$$\theta_{cilindro \infty}^*(r = 0, t = 15 \text{ min}) = 0,530$$

Então teremos

$$\theta_{L,0,15 \text{ min}}^* = \frac{T(0,06;0;15 \text{ min}) - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = 0,757 \times 0,530 = 0,401$$

$$T(0,06; 0; 15 \text{ min}) = 25 + (120 - 25) \times 0,401 = 63,1^{\circ}\text{C}$$

Há uma pequena variação da temperatura dentro do cilindro, o que era de prever face aos valores dos números de Biot já calculados. A temperatura $T(L, r_{ext}, 15 \text{ min})$ será um pouco inferior.

2 Convecção

A transferência de calor por convecção é o modo de transferência quando há fluidos em movimento. O movimento torna a transferência mais intensa, por comparação com a condução no fluido. O calor transfere-se entre uma superfície/corpo e o fluido em causa devido a uma diferença de temperaturas. De uma forma prática, a relação entre a potência calorífica transferida e a diferença de temperaturas é expressa através do coeficiente de convecção, conforme visto já no capítulo anterior:

$$\dot{q} = h(T_{sup} - T_{fluido,\infty}) \quad (2.1)$$

A temperatura a considerar para o fluido é a temperatura longe da superfície sólida (parede), uma vez que na parede ele se encontrará à temperatura dela. A definição da temperatura longe da parede variará consoante se trate de um escoamento interno ou externo, como veremos.

A via teórica para cálculo do coeficiente de convecção é complexa, mesmo em regime permanente (único a tratar), pois envolve resolver a equação da energia para um escoamento. E só existem soluções analíticas em casos muito simples. Nos outros casos há 2 abordagens possíveis: uma abordagem numérica ao cálculo do campo de velocidades, pressões e temperaturas (vulgarmente conhecida por CFD – Computational Fluid Dynamics), que exige o recurso a meios computacionais, ou uma abordagem semi-empírica assente em correlações experimentais, sendo o coeficiente estimado a partir de parâmetros do escoamento.

Após uma abordagem ao que se passa de um modo geral num escoamento junto a uma parede sólida, trataremos em separado os escoamentos externos e os escoamentos internos (condutas). Será ainda tratada a convecção quando o movimento do fluido se deve à própria diferença de temperaturas existente no seu seio, ou seja, quando há convecção natural.

No final do capítulo apresentam-se diversos problemas práticos que ilustram a aplicação dos conceitos e métodos de cálculo vistos.

2.1 Escoamentos, camadas limite e coeficiente de convecção

A transferência de calor entre uma superfície sólida e um fluido em movimento depende de como varia a temperatura no interior do fluido (escoamento). Ou seja, o coeficiente de convecção (h) depende da distribuição de temperatura no fluido. Para expressar como varia a temperatura do fluido efetua-se um balanço de energia a um elemento de volume (volume de controlo) infinitesimal do fluido, tal como foi feito no caso da condução, e levou à equação geral da condução. O balanço de energia dirá que, em regime permanente (único a considerar), a variação da energia contida no escoamento entre a entrada e a saída do volume de controlo é igual ao balanço de trocas de energia desse volume (por condução e outras).

O balanço energético traduz-se na chamada equação da energia para um escoamento. Considerando um escoamento 2D em regime laminar, e um fluido incompressível (com massa específica constante), a equação pode escrever-se em coordenadas cartesianas como:

$$\rho c_p \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \Phi + \dot{g} \quad (2.2)$$

sendo \dot{g} a já conhecida taxa de geração interna de calor (se existir), e Φ a função dissipação viscosa, que traduz o calor gerado pelo atrito viscoso; esta função tem um peso significativo quando a viscosidade do fluido é elevada ou o gradiente de velocidade é muito elevado, podendo desprezar-se nos outros casos. Note-se que no caso da velocidade ser zero (fluido em repouso), a equação se reduz à equação geral da condução em regime permanente (2D).

Não existe uma solução analítica geral para a equação (2.2), mesmo que se conheça o campo de velocidades. Alguns exemplos a ver em 2.6 tratarão, com muitas simplificações, da obtenção de uma solução analítica. Quando a solução analítica existir, é possível obter o coeficiente de convecção a partir do cálculo do gradiente de temperatura no fluido junto à parede/superfície sólida. Com efeito, junto à parede a velocidade do fluido é nula, pelo que o calor passa nesse ponto por condução. Podemos escrever:

$$\dot{q}_{sup} = -k_{fluido} \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{sup} = h(T_{sup} - T_{fluido,\infty}) \quad (2.3)$$

em que n é a direção normal à superfície sólida, e que mostra que o coeficiente de convecção é proporcional ao gradiente de temperatura do fluido na parede/superfície.

Quando um escoamento encontra uma parede sólida, o campo de velocidades altera-se: junto à parede a velocidade é muito baixa (zero mesmo na parede), aumentando à medida que a distância à parede aumenta. A zona de maior variação (99% da variação) é designada por camada limite dinâmica. Quanto ao campo de temperaturas, também é influenciado pela parede, desde que esta se encontre a uma temperatura diferente (maior ou menor). De modo análogo ao campo de velocidades pode falar-se de uma zona onde a temperatura varia mais acentuadamente – a camada limite térmica. A Figura 2.1 representa esquematicamente as 2 camadas limite e a sua evolução ao longo do escoamento. Como a influência da parede se vai estendendo para mais longe dela ao longo do escoamento, a espessura de ambas as camadas vai aumentando. No que toca à camada limite térmica, isso implica que o gradiente de temperatura na parede vai diminuindo, pelo que o coeficiente de convecção vai diminuindo, de acordo com a equação (2.3). O eventual aparecimento de turbulência na camada limite irá aumentar o coeficiente, como veremos à frente.

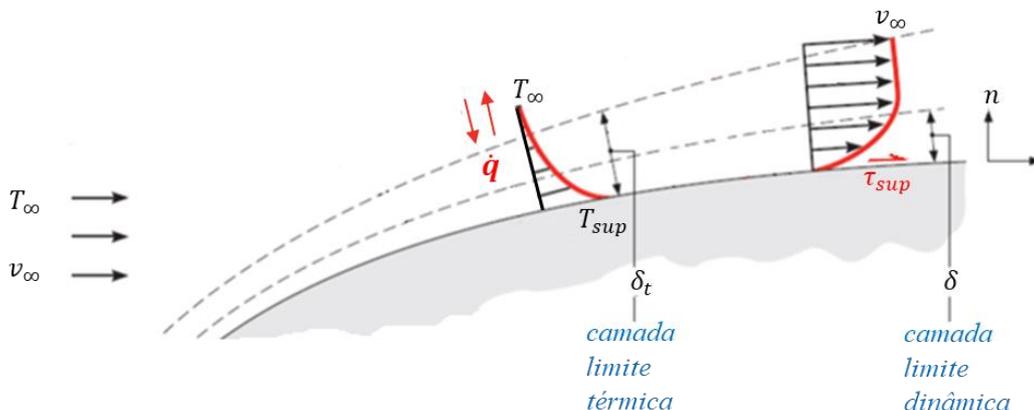


Figura 2.1 – Evolução das camadas limite junto a uma superfície sólida. Adaptado de [1].

As limitações na obtenção de uma solução exata/analítica para a equação da energia, que se juntam às dificuldades já conhecidas da Mecânica de Fluidos para a obtenção de uma solução exata para o campo de velocidades (equação da quantidade de movimento), levaram a que se tratasse de forma semi-empírica o cálculo do coeficiente de convecção. Esse método não permite obter a distribuição de temperatura no fluido, mas sim quantificar valores de h e, conseqüentemente, calcular a potência calorífica trocada entre a superfície sólida e o fluido em movimento.

O método semi-empírico baseia-se na quantificação de uma relação adimensional entre o coeficiente de convecção e parâmetros do escoamento como a sua geometria, regime de escoamento e propriedades do fluido. A relação foi quantificada para uma variedade de geometrias, regimes e fluidos, e a sua forma funcional pode obter-se a partir da adimensionalização da equação da energia. No caso de escoamentos impostos por ações externas – ditos escoamentos forçados – ela tem a forma:

$$Nu = f(\text{geometria}, Re, Pr) \quad (2.4)$$

e assenta na definição de 3 números adimensionais: o número de Nusselt ($Nu = hL_c/k$), que compara a resistência de convecção com a de condução no fluido numa espessura característica L_c (que depende da geometria), o número de Reynolds ($Re = \rho v_c L_c / \mu$), que compara as forças de inércia do escoamento (velocidade característica ou de referência) com as forças de viscosidade que se opõem ao escoamento, e o número de Prandtl ($Pr = \mu c_p / k$), que caracteriza o fluido, comparando as aptidões para transferir quantidade de movimento e para transferir calor.

Como veremos nas secções seguintes, encontram-se disponíveis relações funcionais (f) para uma grande variedade de geometrias correntes, regimes de escoamento (laminar e turbulento) e fluidos. Mas note-se que todas elas consideram que o fluido é incompressível e não viscoso (efeito nulo da função dissipação viscosa). Nos casos mais simples, nos poucos para os quais há solução analítica da equação da energia, a relação pode obter-se teoricamente. Para a grande maioria dos casos a relação funcional é obtida por via experimental (correlação), o que se traduz numa incerteza dos resultados que nalguns casos poderá chegar a 15%.

2.2 Escoamentos forçados externos: placa plana, cilindro e esfera

Nos escoamentos externos o fluido contacta com uma superfície sólida, mas não está confinado por paredes. O exemplo mais simples é o do escoamento paralelo a uma placa plana, que começaremos por considerar.

No caso do escoamento ter regime laminar (Re até 5×10^5 calculado com um comprimento característico – L_c – igual ao comprimento da placa na direção do escoamento) é possível obter o coeficiente de convecção analiticamente, com algumas simplificações. O resultado depende da condição fronteira na superfície da placa, considerando-se os 2 casos mais simples: temperatura constante ou fluxo de calor constante, ao longo do comprimento (x). Para T_{sup} constante ao longo de x , o valor local do coeficiente é dado por (para $Pr > 0,6$)

$$Nu_x = 0,332 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad (2.5)$$

sendo $Re_x = \rho v_{\infty} x / \mu$ e $Nu_x = hx/k$.

Note-se que o Nu_x aumenta ao longo de x . No entanto h diminui, pois x cresce mais que Nu_x .

Quando a condição na superfície é de fluxo constante, a relação é:

$$Nu_x = 0,453 Re_x^{1/2} Pr^{1/3} \quad (2.6)$$

ou seja, o coeficiente é 36% superior ao do caso T_{sup} constante.

Quanto ao valor para cálculo do coeficiente de convecção médio (entre 0 e L), obtém-se a partir dos valores locais:

$$\overline{Nu}_L = 0,664 Re_L^{1/2} Pr^{1/3} \quad \text{para } T_{sup} \text{ constante} \quad (2.7)$$

$$\overline{Nu}_L = 0,680 Re_L^{1/2} Pr^{1/3} \quad \text{para } \dot{q}_{sup} \text{ constante} \quad (2.8)$$

que traduzem uma pequena diferença (2%) entre as 2 condições, ao contrário do que acontece para os valores locais.

Quando o número de Re atinge 5×10^5 aparece turbulência na camada limite, o que intensifica a transferência (de quantidade de movimento e de calor). Nessas condições não existe solução analítica, mas valores experimentais permitiram obter para os valores locais

$$Nu_x = 0,0296 Re_x^{4/5} Pr^{1/3} \quad \text{para } T_{sup} \text{ constante e } Pr > 0,6 \quad (2.9)$$

$$Nu_x = 0,0308 Re_x^{4/5} Pr^{1/3} \quad \text{para } \dot{q}_{sup} \text{ constante e } Pr > 0,6 \quad (2.10)$$

também com uma pequena diferença (4%) entre as 2 condições. Saliente-se que na prática muitas vezes não existe nenhuma das condições: nem a temperatura nem o fluxo são constantes; a pequena diferença torna menos importante a escolha da relação a usar.

Quanto ao valor médio do coeficiente, é possível agrupar as 2 zonas/regimes – laminar e turbulenta – numa única expressão, vindo, para $Pr > 0,6$ e $5 \times 10^5 < Re < 10^7$:

$$\overline{Nu}_L = (0,037 Re_L^{4/5} - 871) Pr^{1/3} \quad (2.11)$$

aproximadamente igual, portanto, para as 2 condições fronteira.

Como representa a Figura 2.2, dentro do mesmo regime (laminar ou turbulento) há uma diminuição do coeficiente de convecção local com o comprimento. Ao passar do regime/camada laminar para o turbulento há um aumento. Essa transição é na realidade gradual, havendo uma zona de transição, que por facilidade de cálculo se assume ocorrer bruscamente. O coeficiente médio representa a média para toda a superfície. É, portanto, uma simplificação a consideração de um coeficiente constante numa superfície (como feito na secção 1).

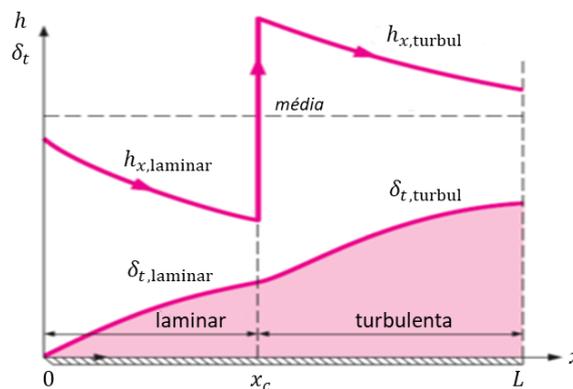


Figura 2.2 – Zonas laminar e turbulenta numa placa plana e variação do coeficiente de convecção local. Adaptado de [2].

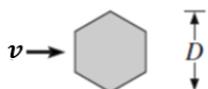
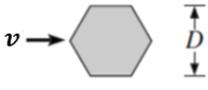
Saliente-se que ao aplicar as correlações de convecção vistas, todas as propriedades físicas dos fluidos que intervêm nos 3 números adimensionais (Nu , Re e Pr) devem ser avaliadas a uma temperatura média aritmética entre a temperatura da superfície e a do fluido longe da parede. Algumas das correlações da literatura, assim como algumas a apresentar mais à frente, usam propriedades à temperatura média ou a $T_{fluido,\infty}$, e um fator de correção para a variação de propriedades com a temperatura (propriedades a $T_{fluido,\infty}$ e propriedades a T_{sup}).

Outra geometria que ocorre frequentemente na prática é a de escoamentos no exterior de cilindros longos, ou outros prismas, sendo o escoamento perpendicular ao eixo do cilindro/prisma. Nestes casos o escoamento é complexo, nomeadamente na zona de trás do objecto, devido à formação de vórtices e possibilidade de descolamento da parede. Uma correlação experimental genérica, válida para $Pr > 0,7$, é

$$\overline{Nu}_D = C Re_D^m Pr^{1/3} \tag{2.12}$$

sendo C e m coeficientes dados na Tabela 2.1, para várias geometrias e intervalos de Re .

Tabela 2.1 – Coeficientes C e m para cálculo do número de Nusselt em cilindros/prismas – equação (2.12).

Geometria	Re_D	C	m
	0,4 – 4	0,989	0,330
	4 – 40	0,911	0,385
	40 – 4 000	0,683	0,466
	4 000 – 40 000	0,193	0,618
	40 000 – 400 000	0,027	0,805
	6 000 – 60 000	0,304	0,59
		5 000 – 60 000	0,158
		5 200 – 20 400	0,164
	20 400 – 105 000	0,039	0,78
	4 500 – 90 700	0,150	0,638
	Placa fina 	frente 10 000 – 50 000	0,667
trás 7 000 – 80 000		0,191	0,667

Uma outra geometria relacionada é a dos escoamentos perpendiculares a conjuntos de cilindros ou, mais frequentemente, feixes de tubos. Nestes casos há que distinguir se o feixe é alinhado ou alternado, o que altera o padrão do escoamento – Figura 2.3. Enquanto num cilindro isolado o Re é calculado com a velocidade antes do obstáculo, no caso dos feixes é usada a velocidade máxima na secção de passagem mínima entre cilindros/tubos, que pode ser a secção transversal (A_T) ou diagonal (A_D) – ver Figura 2.3.

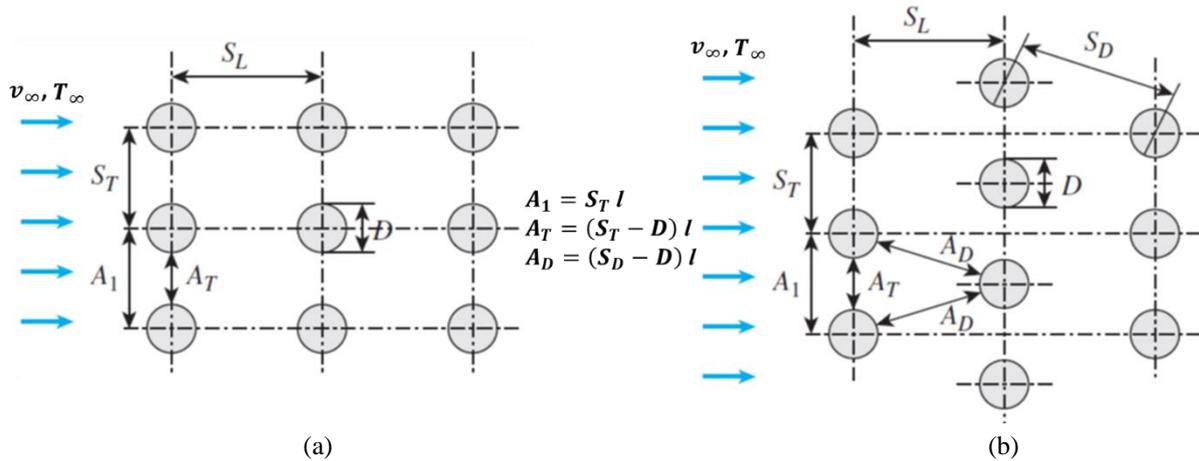


Figura 2.3 – Configurações, dimensões, passos (S) e seções de passagem em feixes de tubos: (a) alinhados; (b) alternados. l é a largura (perpendicular à figura). Adaptado de [2].

Uma correlação experimental genérica, válida para $Pr > 0,7$, é

$$\overline{Nu}_D = C_1 C_2 Re_{D,max}^m Pr^{0,36} \left(\frac{Pr}{Pr_{sup}} \right)^{1/4} \quad (2.13)$$

sendo C_1 , C_2 e m coeficientes dados na Tabela 2.2, para várias configurações e intervalos de Re . C_2 é igual a 1 para um número de filas maior que 16. Nesta correlação devem usar-se propriedades à temperatura média entre a superfície dos tubos e o fluido longe dela, com exceção de Pr_{sup} (à temperatura T_{sup}).

Tabela 2.2 – Coeficientes C_1 , m e C_2 para cálculo do número de Nusselt em feixes de tubos – equação (2.13).

Configuração	$Re_{D,max}$	C_1	m
alinhados	$10 - 10^2$	0,80	0,40
alternados	$10 - 10^2$	0,90	0,40
alinhados	$10^2 - 10^3$	aproximar como cilindro isolado	
alternados	$10^2 - 10^3$		
alinhados ($S_T/S_L > 0,7$) ^a	$10^3 - 2 \times 10^5$	0,27	0,63
alternados ($S_T/S_L < 2$)	$10^3 - 2 \times 10^5$	$0,35(S_T/S_L)^{1/5}$	0,60
alternados ($S_T/S_L > 2$)	$10^3 - 2 \times 10^5$	0,40	0,60
alinhados	$2 \times 10^5 - 2 \times 10^6$	0,021	0,84
alternados	$2 \times 10^5 - 2 \times 10^6$	0,022	0,84

^a para $S_T/S_L < 0,7$ a TC é ineficiente, não devendo usar-se tubos alinhados

$C_2(N_{filas})$	1	2	3	4	5	7	10	13	16
alinhados	0,70	0,80	0,86	0,90	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99
alternados	0,64	0,76	0,84	0,89	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99

Um último caso de escoamento externo a referir é o do escoamento em torno de uma esfera. Uma correlação experimental válida para $Pr > 0,7$ e $3,5 < Re_D < 7,6 \times 10^4$, é

$$\overline{Nu}_D = 2 + (0,4 Re_D^{1/2} + 0,06 Re_D^{2/3}) Pr^{0,4} \left(\frac{\mu}{\mu_{sup}} \right)^{1/4} \quad (2.14)$$

sendo todas as propriedades avaliadas a T_∞ e μ_{sup} a T_{sup} .

2.3 Escoamentos forçados internos

Nos escoamentos internos o fluido está confinado numa conduta, que pode ter uma secção qualquer e variável. Como se viu em 2.1 e 2.2, a tendência geral num dado regime de escoamento é haver um aumento da espessura da camada limite ao longo do escoamento, que leva a uma diminuição do coeficiente de convecção. No caso de um escoamento confinado existe um limite para o desenvolvimento da espessura da camada limite, devido à interação das várias superfícies da conduta.

A Figura 2.4 representa a evolução da camada limite dinâmica e da camada limite térmica ao longo de um tubo, a partir de uma velocidade e temperatura constantes à entrada. As camadas crescem até se encontrarem no eixo da conduta. A partir daí o perfil de velocidades é constante (em regime permanente), ou desenvolvido; na zona de escoamento desenvolvido a velocidade só tem componente paralela ao eixo da conduta (v_x). O perfil de temperaturas pode variar, pois o fluido pode trocar calor com o exterior através da parede; no entanto, na zona desenvolvida é constante a diferença de temperatura adimensional entre a superfície da parede e o fluido – $(T_{sup} - T)/(T_{sup} - T_m)$, sendo T_m a temperatura média do fluido na secção, a definir à frente. Os comprimentos de entrada (até à zona desenvolvida) não são no geral iguais para a camada limite dinâmica e para a térmica – apenas são iguais quando $Pr=1$ (nesse caso o fluido tem a mesma aptidão para transferir quantidade de movimento e calor).

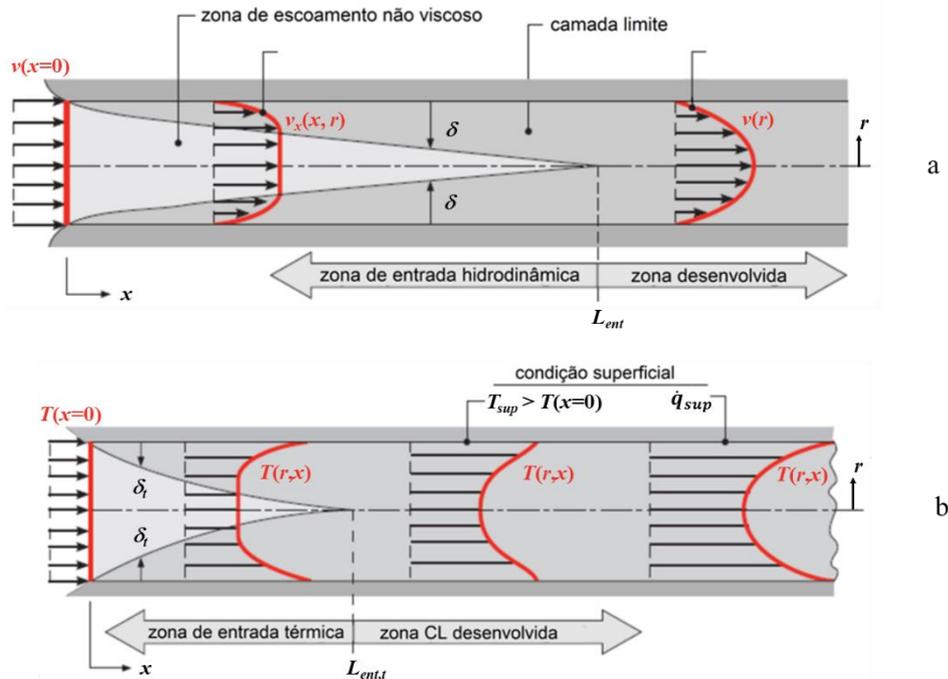


Figura 2.4 – Escoamento num tubo circular: (a) evolução da camada limite dinâmica e perfis de velocidade; (b) evolução da camada limite térmica e perfis de temperatura (diferentes condições na parede, T_{sup} ou \dot{q}_{sup} constante, considerada mais quente que o fluido). Adaptado de [1].

Ocorrem evoluções semelhantes em condutas não circulares, de qualquer secção. Tratam-se as diferentes secções (constantes ao longo do escoamento) com auxílio da definição de diâmetro hidráulico, igual a:

$$D_h = \frac{4 A_s}{P} \quad (2.15)$$

sendo A_s a área da secção transversal do escoamento e P o perímetro de contacto entre o fluido e a conduta (nessa mesma secção). Nos escoamentos internos usa-se este diâmetro hidráulico como comprimento característico para cálculo do Re e do Nu , e não o comprimento ao longo do escoamento (x), como no caso visto da placa plana.

O coeficiente de convecção é maior na zona de entrada de uma conduta, vai baixando ao longo da direcção do escoamento, e torna-se constante na zona desenvolvida. E isso acontece quer em regime de escoamento laminar ($Re_D < 2300$) quer em regime turbulento. Os comprimentos de entrada dinâmico e térmico numa conduta circular em regime laminar podem estimar-se com

$$(L_{ent,d}/D)_{lam} \approx 0,05 Re_D \quad (2.16)$$

$$(L_{ent,t}/D)_{lam} \approx 0,05 Re_D Pr \quad (2.17)$$

que podem usar-se com alguma cautela no caso de condutas não circulares (com o D_h). No caso de $Re_D = 2300$, isso significa que o comprimento de entrada dinâmico será de cerca de 115 diâmetros, podendo o comprimento de entrada térmico ser menor ou maior, dependendo de Pr . No caso do ar, com um Pr de cerca de 0,7, o comprimento de entrada térmico será inferior (até $80D$ para $Re_D = 2300$).

Em regime turbulento os comprimentos são menores, podendo usar-se

$$(L_{ent,d}/D)_{turbul} \approx 1,359 Re_D^{1/4} \quad (2.18)$$

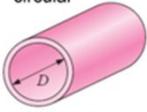
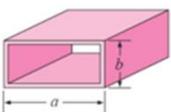
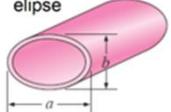
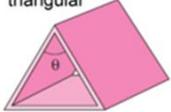
$$(L_{ent,t}/D)_{turbul} \approx 10 \quad (\text{regra prática}) \quad (2.19)$$

O coeficiente de convecção é relacionado com a diferença entre a temperatura na superfície e longe da superfície – equação (2.1). Como a temperatura do fluido varia na secção do escoamento, usa-se para referência da temperatura longe da parede a temperatura média na secção, ou temperatura de mistura, que corresponde a uma temperatura que a verificar-se constante em todos os pontos da secção, conduziria à mesma energia transportada nessa secção. Ou seja, matematicamente:

$$\dot{M} c_p T_m = \int_{A_s} \rho v_x(r) c_p T(r) dA_s \quad (2.20)$$

Para um escoamento laminar com dissipação viscosa desprezável, no caso da zona desenvolvida pode deduzir-se teoricamente o valor do coeficiente de convecção adimensional, (Nu) tendo este um valor constante (independentemente do valor de Re). E isso verifica-se para qualquer forma/secção da conduta. No entanto, o valor depende da condição fronteira na parede: temperatura ou fluxo constante são as duas consideradas. Note-se que na realidade há situações que não correspondem a nenhuma dessas condições, pelo que o uso de um ou outro valor tem sempre uma margem de incerteza. A Tabela 2.3 apresenta os valores para várias geometrias. Tal como acontece com o fator de atrito, o efeito da rugosidade da parede da conduta em h é desprezável em regime laminar.

Tabela 2.3 –Número de Nusselt em regime laminar, na zona desenvolvida, para diferentes secções de condutas. Adaptado de [2].

geometria / secção	a/b ou θ°	Nusselt = $h D_h / k$		factor de atrito f
		$T_{sup} = \text{const}$	$\dot{q}_{sup} = \text{const}$	
circular 	—	3.66	4.36	64.00/Re
rectangular 	1	2.98	3.61	56.92/Re
	2	3.39	4.12	62.20/Re
	3	3.96	4.79	68.36/Re
	4	4.44	5.33	72.92/Re
	6	5.14	6.05	78.80/Re
	8	5.60	6.49	82.32/Re
	∞	7.54 / 4.86*	8.24 / 5.39*	96.00/Re
elipse 	1	3.66	4.36	64.00/Re
	2	3.74	4.56	67.28/Re
	4	3.79	4.88	72.96/Re
	8	3.72	5.09	76.60/Re
	16	3.65	5.18	78.16/Re
	triangular 	θ		
10°	1.61	2.45	50.80/Re	
30°	2.26	2.91	52.28/Re	
60°	2.47	3.11	53.32/Re	
90°	2.34	2.98	52.60/Re	
120°	2.00	2.68	50.96/Re	

* uma placa c/ TC e outra isolada

Na zona de entrada o coeficiente tem valores maiores, e dependentes de Re (e Pr). A Figura 2.5 apresenta os valores dos coeficientes adimensionais (Nu_D) locais e médios, para um tubo circular. Consideram-se 2 hipóteses: camada limite dinâmica já desenvolvida à entrada, ou ainda não desenvolvida (em ambos os casos a camada limite térmica não está desenvolvida).

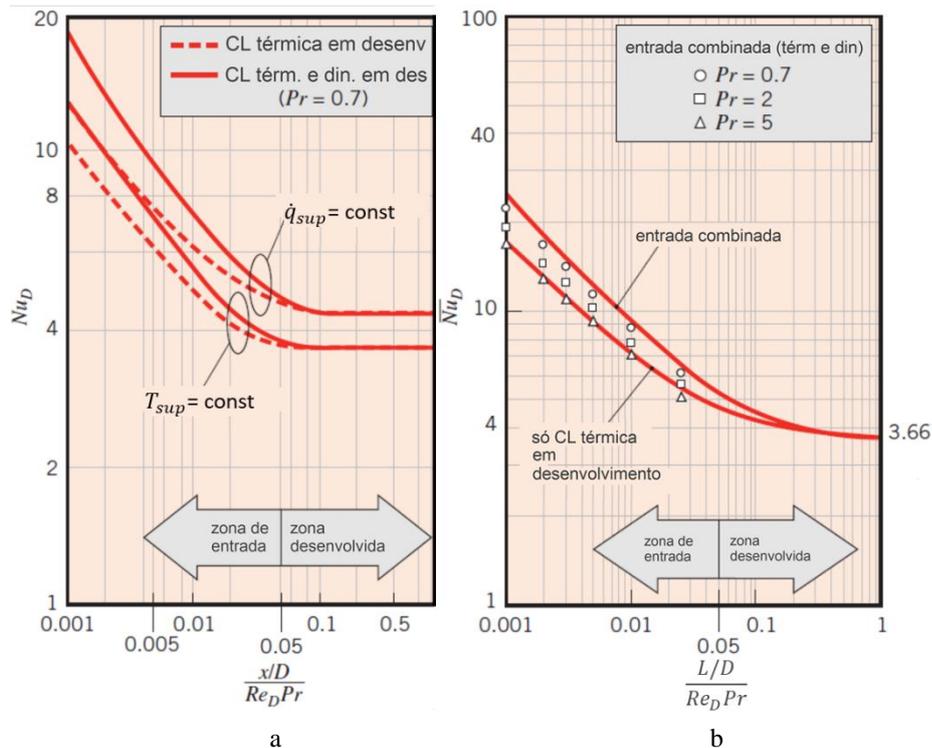


Figura 2.5 – Número de Nusselt em regime laminar, na zona desenvolvida, para um tubo circular: (a) valores locais; (b) valores médios na conduta de comprimento L , com T_{sup} constante. Adaptado de [1].

Para o caso de T_{sup} constante e camada limite dinâmica já desenvolvida à entrada do tubo (só a camada limite térmica se desenvolve), pode obter-se o coeficiente médio com

$$\overline{Nu}_D = 3,66 + \frac{0,0668 Re_D Pr D/L}{1 + 0,04 (Re_D Pr D/L)^{2/3}} \quad (2.21)$$

Para o caso de ambas as camadas se desenvolverem desde o início, pode encontrar-se uma expressão em [1].

No caso do escoamento se dar em regime turbulento também existe uma evolução semelhante entre a zona de entrada e a desenvolvida. Só que nesse regime, o comprimento das zonas de entrada é muito menor que no regime laminar – até 10 diâmetros para a camada limite térmica como mostra a Figura 2.6. Isso faz com que na maior parte das situações práticas a zona de entrada tenha pouca importância neste regime. Também tem menos peso a diferença entre temperatura ou fluxo constante na superfície da parede da conduta.

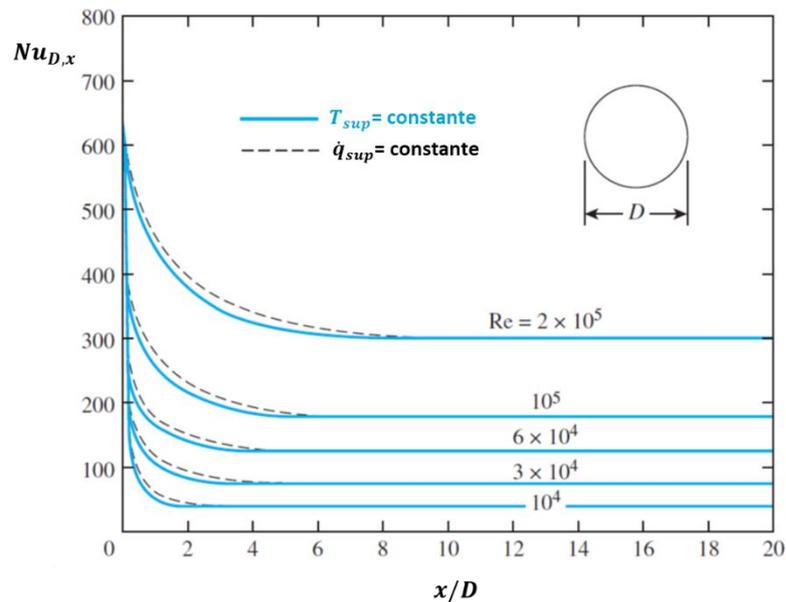


Figura 2.6 – Número de Nusselt local em regime turbulento, para um tubo circular e para diferentes valores de Re . Adaptado de [2].

Para regime turbulento desenvolvido, a expressão mais conhecida para cálculo do coeficiente de convecção é:

$$Nu_D = 0,023 Re_D^{0,8} Pr^n \quad (2.22)$$

conhecida por equação de Dittus-Boelter, válida para $Pr > 0,7$, $Re_D > 10000$, com propriedades a T_m , e em que o expoente n é igual a 0,3 quando o fluido arrefece (perde calor) e 0,4 quando aquece (recebe calor da superfície).

No caso de tubos muito curtos, em que se queira contabilizar o efeito da zona de entrada, pode usar-se a correlação empírica:

$$\frac{\overline{Nu}_D}{Nu_{D, desenv}} = 1 + \frac{1}{(L/D)^{2/3}} \quad (2.23)$$

que mostra existir um acréscimo de 20% ao coeficiente desenvolvido quando $L/D=10$.

Há também correlações na literatura, [1], para contabilizar o efeito da rugosidade da conduta, que tem um efeito maior no regime turbulento. Podem ainda encontrar-se soluções para escoamentos entre cilindros concêntricos (escoamento anelar), e para tubos enrolados em hélice (serpentinhas), em [1], para regime laminar.

Uma questão importante nos escoamentos internos é a da variação da temperatura média, ou de mistura (T_m), ao longo do escoamento, e a sua relação com o coeficiente de convecção. Para avaliar a variação de temperatura média podemos efetuar o balanço energético de um elemento de volume de fluido genérico, abrangendo toda a secção da conduta – Figura 2.7. Vamos novamente distinguir 2 casos de condições na parede: temperatura ou fluxo constante ao longo do escoamento. O caso de fluxo constante verifica-se quando um elemento aquecedor em contacto com a parede fornece uma potência constante em toda a sua área. A situação de temperatura constante pode aproximar casos em que, variando a temperatura, se assume um valor médio desta para toda a conduta.

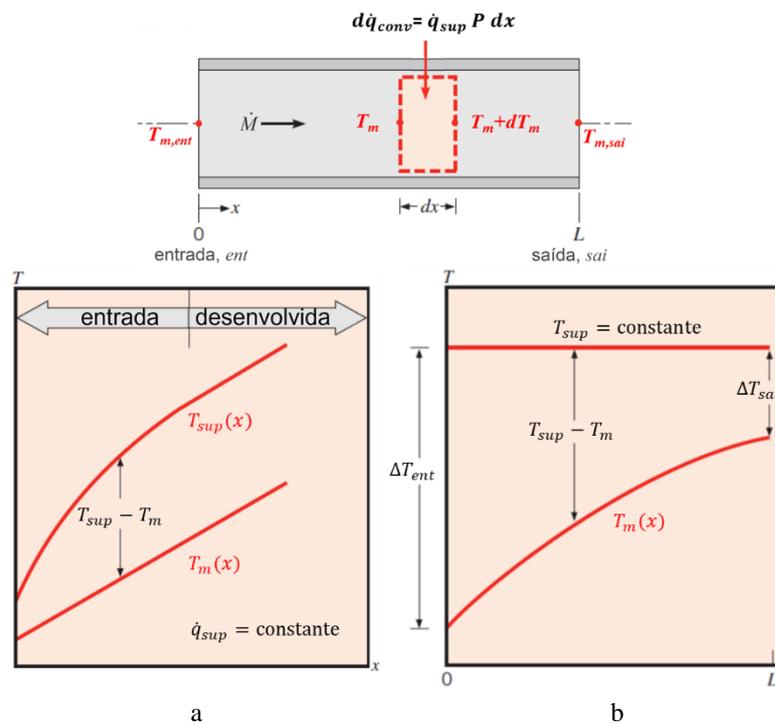


Figura 2.7 – Evolução da temperatura média do fluido num escoamento, com a parede a temperatura mais alta: (a) fluxo constante na parede (com zona de entrada e desenvolvida); (b) temperatura constante na parede. Adaptado de [1].

Quando o fluxo na parede é constante – Figura 2.7(a) – a diferença ($T_{sup} - T_m$) mantém-se constante na zona desenvolvida, pois é igual a \dot{q}_{sup}/h e ambos são constantes em x . Quanto à evolução da temperatura média, o balanço do elemento representado na Figura 2.7 é:

$$\dot{M}c_p dT_m = \dot{q}_{sup} P dx \quad (2.24)$$

o que significa que, sendo dT_m/dx constante, a temperatura média varia linearmente.

Quando a temperatura da parede é constante ao longo de x – Figura 2.7(b) – o fluxo convectivo é proporcional a h e à diferença de temperaturas, ou seja:

$$\dot{M}c_p dT_m = h P dx (T_{sup} - T_m) \quad (2.25)$$

Sendo h constante com x , caso da zona desenvolvida, ou usando um valor médio suposto constante, podemos integrar facilmente a equação (2.25). Sendo $T=T_{m,ent}$ para $x=0$, obtém-se para a temperatura ao fim do comprimento L :

$$\frac{(T_{sup}-T_{m,sai})}{(T_{sup}-T_{m,ent})} = \exp\left(-\frac{hPL}{\dot{M}c_p}\right) \quad (2.26)$$

equação que mostra que a temperatura média do fluido varia exponencialmente entre a entrada e a saída da conduta. Pode desprezar-se o comprimento de entrada, o que é frequentemente uma boa aproximação no caso do regime turbulento, ou então obter uma solução aproximada com o valor médio de h .

2.4 Escoamentos por diferença de temperatura (convecção natural)

Quando um fluido em repouso experimenta uma diferença de temperatura no seu interior, como por exemplo ao contactar uma superfície mais quente ou mais fria, gera-se uma diferença de densidades (massa específica). As porções de fluido mais quente são mais leves, e portanto vão subir na vertical, devido à menor ação da gravidade; ao contrário, as porções mais frias tenderão a descer. Quando se gera um escoamento devido a essa diferença de densidades dizemos que estamos perante um escoamento de convecção natural. Neste caso a resolução analítica das equações da quantidade de movimento e energia é ainda mais difícil, pois uma das forças que atuam no fluido, a de impulsão, depende do campo de temperaturas.

No caso dos escoamentos de convecção natural a relação funcional (2.4) é diferente, uma vez que as velocidades do fluido são devidas à diferença de temperatura. Então, em vez de uma velocidade imposta, quantificada no Re , intervém um outro número adimensional – número de Grashoff – que compara as forças de impulsão por diferença de densidade do fluido com as forças de viscosidade (que se opõem ao movimento). É calculado através de:

$$Gr = \frac{g\beta(T_{sup}-T_{\infty})L_c^3}{(\mu/\rho)^2} \quad (2.27)$$

sendo β o coeficiente de expansão térmica, calculável para os gases perfeitos como o inverso da temperatura (em K). Então a relação funcional para a convecção natural é

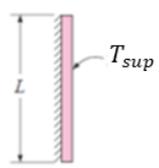
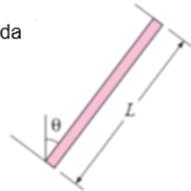
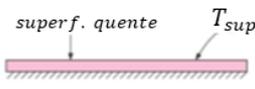
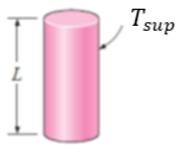
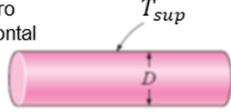
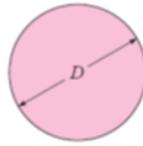
$$Nu = \frac{hL_c}{k} = f(\text{geometria}, Gr, Pr) \quad (2.28)$$

A dimensão característica L_c depende da geometria considerada. A Tabela 2.4 apresenta correlações para diferentes geometrias, como placas e cilindros, verticais e horizontais. Todas as propriedades do fluido devem ser avaliadas à temperatura média entre a do fluido e a da superfície sólida. Em muitas correlações aparece o número de Rayleigh, $Ra = Gr.Pr$.

Na prática há situações em que ocorrem simultaneamente, e com o mesmo peso, a convecção forçada e natural (situações de convecção mista). Tal ocorre quando o quociente Gr/Re^2 é da ordem de 1. O cálculo é mais complexo, e não será considerado neste texto.

Uma outra situação de convecção natural corrente ocorre num espaço confinado entre superfícies (cavidades onde o fluido está contido). Quando a geometria é definida por placas planas paralelas, separadas por uma dada distância L , essa é a dimensão característica a usar. Existem correlações para cavidades retangulares horizontais, verticais e inclinadas – ver Figura 2.8. Note-se que nesta geometria o Nu e o coeficiente de convecção quantificam a transferência de calor nas 2 superfícies limites da cavidade (às temperaturas T_1 e T_2).

Tabela 2.4 – Correlações empíricas para cálculo do número de Nusselt médio na convecção natural sobre superfícies (mais quentes ou mais frias que o fluido).

Geometria	Dimensão característica L_c	Intervalo Gr.Pr	Nu
placa vertical 	L	$10^4 - 10^9$ $10^9 - 10^{13}$ todos	$Nu = 0,59 (Gr.Pr)^{1/4}$ $Nu = 0,1 (Gr.Pr)^{1/3}$ $Nu = \left[0,825 + \frac{0,387 (Gr.Pr)^{1/6}}{[1 + (0,492/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right]^2$
placa inclinada 	L	$< 10^9$ no Gr substituir g por $g \cdot \cos\theta$	usar equações da placa vertical para superfície superior mais fria ou superfície inferior mais quente
placa horizontal superfície superior mais quente ou superfície inferior mais fria  superfície inferior mais quente ou superfície superior mais fria 	A_{sup}/P	$10^4 - 10^7$ $10^7 - 10^{11}$ $10^5 - 10^{11}$	$Nu = 0,54 (Gr.Pr)^{1/4}$ $Nu = 0,15 (Gr.Pr)^{1/3}$ $Nu = 0,27 (Gr.Pr)^{1/4}$
cilindro vertical 	L		usar equações da placa vertical se $D \geq \frac{35 L}{Gr^{1/4}}$
cilindro horizontal 	D	$\leq 10^{12}$	$Nu = \left[0,6 + \frac{0,387 (Gr.Pr)^{1/6}}{[1 + (0,559/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right]^2$
esfera 	D	$\leq 10^{11}$ $Pr \geq 0,7$	$Nu = 2 + \frac{0,589 (Gr.Pr)^{1/4}}{[1 + (0,469/Pr)^{9/16}]^{4/9}}$

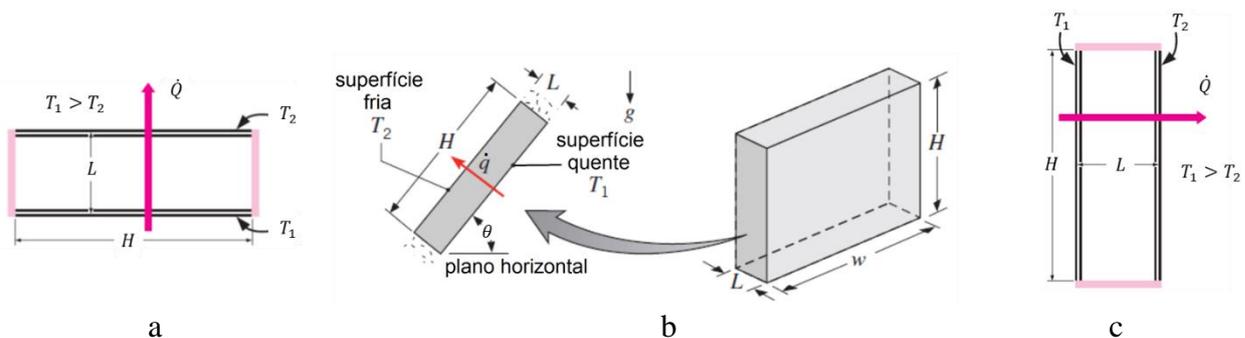


Figura 2.8 – Cavidades retangulares e dimensões relevantes: (a) horizontal; (b) inclinada; (c) vertical.

Para uma cavidade horizontal, pode usar-se

$$\overline{Nu}_L = 1 + 1,44 \left[1 - \frac{1708}{Ra_L} \right]^+ + \left[\frac{Ra_L^{1/3}}{18} - 1 \right]^+, \text{ para } Ra_L < 10^8 \quad (2.29)$$

denotando o sinal + que se o valor calculado for negativo, deve ser tomado como zero.

Note-se que na equação anterior, quando Ra_L é menor que 1708, \overline{Nu}_L vem igual a 1. Tal significa que o coeficiente de convecção h é igual ao de condução entre as 2 placas, k/L . O espaço entre as placas não permite o movimento do fluido, só podendo o calor transferir-se por condução.

No caso da cavidade inclinada de um ângulo θ em relação à horizontal, também se verifica que a convecção desaparece quando $Ra_L \cos \theta \leq 1708$. A correlação para essa geometria é

$$\overline{Nu}_L = 1 + 1,44 \left[1 - \frac{1708}{Ra_L \cos \theta} \right]^+ \left(1 - \frac{1708 (\sin 1,8 \theta)^{1,6}}{Ra_L \cos \theta} \right) + \left[\frac{(Ra_L \cos \theta)^{1/3}}{18} - 1 \right]^+ \quad (2.30)$$

válida para $Ra_L \leq 10^5$, $H/L \geq 12$ e $0 \leq \theta < 70^\circ$.

Quanto à cavidade retangular vertical, há várias correlações, para diferentes razões altura sobre profundidade (H/L):

$$\overline{Nu}_L = 0,18 \left(\frac{Pr}{0,2+Pr} Ra_L \right)^{0,29}, \text{ para } 1 < \frac{H}{L} < 2 \text{ e } \frac{Ra_L Pr}{(0,2+Pr)} > 10^3 \quad (2.31)$$

$$\overline{Nu}_L = 0,22 \left(\frac{Pr}{0,2+Pr} Ra_L \right)^{0,28} \left(\frac{H}{L} \right)^{-1/4}, \text{ para } 2 < \frac{H}{L} < 10 \text{ e } 10^3 < Ra_L < 10^{10} \quad (2.32)$$

$$\overline{Nu}_L = 0,42 Ra_L^{1/4} Pr^{0,012} \left(\frac{H}{L} \right)^{-0,3}, \text{ para } 10 < \frac{H}{L} < 40 \text{ e } 10^4 < Ra_L < 10^7 \quad (2.33)$$

$$\overline{Nu}_L = 0,46 Ra_L^{1/3}, \text{ para } 1 < \frac{H}{L} < 40, 10^6 < Ra_L < 10^9 \text{ e } 1 < Pr < 20 \quad (2.34)$$

Para avaliação das propriedades do fluido deve usar-se $(T_1+T_2)/2$, em todas as equações anteriores.

Mas também ocorrem na prática casos de cavidades cilíndricas (entre cilindros concêntricos) e esféricas (entre esferas) – ver Figuras 2.9 e 2.10.

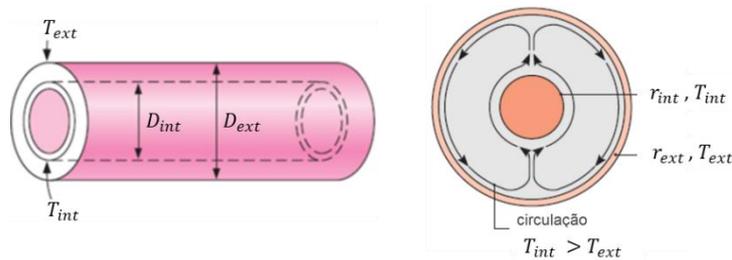


Figura 2.9 – Cavidade cilíndrica (entre cilindros concêntricos): dimensões e temperaturas relevantes, e circulação natural do fluido.

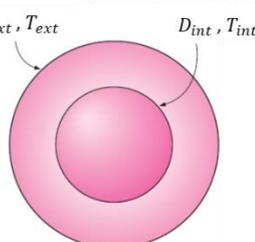


Figura 2.10 – Cavidade esférica (entre esferas concêntricas): dimensões e temperaturas relevantes.

Nestas cavidades, devido à variação da secção com o raio, define-se uma resistência radial em tudo semelhante à resistência de condução radial vista em 1.1.2. Essa resistência é calculada com uma condutibilidade térmica efetiva, k_{ef} , que seria a condutibilidade que daria a mesma potência transferida por convecção natural, se houvesse condução. Ou seja, a potência para a cavidade cilíndrica calcula-se por:

$$\dot{Q} = \frac{2\pi L k_{ef} (T_{int} - T_{ext})}{\ln(r_{ext}/r_{int})} \quad (2.35)$$

A correlação para o número de Nusselt médio, e k_{ef} , em cilindros horizontais, é:

$$\overline{Nu}_{L_c} = \frac{k_{ef}}{k} = 0,386 \left(\frac{Pr}{0,861 + Pr} \right)^{1/4} (Ra_{L_c})^{1/4} \quad (2.36)$$

válida para $0,7 \leq Pr \leq 6000$ e $10^2 < Ra_{L_c} \leq 10^7$, e sendo a dimensão característica

$$L_c = \frac{2 [\ln(r_{ext}/r_{int})]^{4/3}}{(r_{int}^{-3/5} + r_{ext}^{-3/5})^{5/3}} \quad (2.37)$$

Note-se que se $Ra_{L_c} \leq 100$ há condução ($k_{ef} = k$).

Para a cavidade esférica tem-se

$$\dot{Q} = \frac{4\pi k_{ef} (T_{int} - T_{ext})}{(1/r_{int}) - (1/r_{ext})} \quad (2.38)$$

$$\overline{Nu}_{L_c} = \frac{k_{ef}}{k} = 0,74 \left(\frac{Pr}{0,861 + Pr} \right)^{1/4} (Ra_{L_c})^{1/4} \quad (2.39)$$

válida para $0,7 \leq Pr \leq 4000$ e $10^2 < Ra_{L_c} \leq 10^4$, e sendo a dimensão característica

$$L_c = \frac{(1/r_{int} - 1/r_{ext})^{4/3}}{2^{1/3} (r_{int}^{-7/5} + r_{ext}^{-7/5})^{5/3}} \quad (2.40)$$

2.5 Aplicação de métodos numéricos

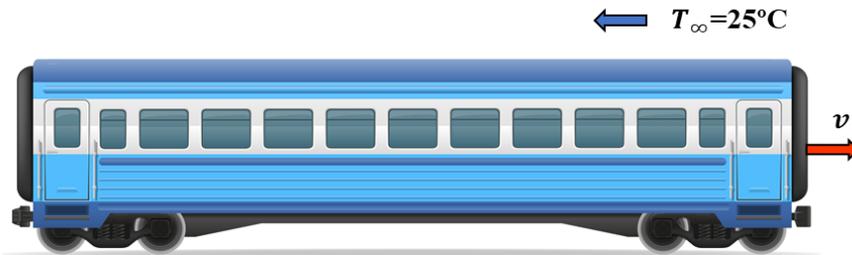
Tal como se viu para a condução do calor, em 1.1.5, podem aplicar-se métodos numéricos como o dos volumes finitos ou o dos elementos finitos para resolver a equação da energia num escoamento. No entanto, devido ao termo de transporte convectivo necessitar do conhecimento do campo de velocidades (ver equação (2.2)), tal exige a sua obtenção prévia. E o campo de velocidades depende por sua vez da distribuição de pressões no escoamento. Assim, no caso geral torna-se necessário resolver as equações da quantidade de movimento ou Navier-Stokes (tantas equações quanto o número de dimensões consideradas), e a da continuidade, antes de resolver a da energia (ou em simultâneo se se tratar de convecção natural). A existência de turbulência é uma complicação adicional (introduzindo parâmetros de turbulência), que exige o recurso a meios computacionais, para que os resultados tenham uma aproximação razoável à realidade.

Os problemas P2.8 e P2.13 apresentam exemplos de aplicação do método dos volumes finitos a escoamentos no interior de um tubo, partindo do conhecimento prévio do perfil de velocidades desenvolvido.

2.6 Problemas práticos resolvidos (P2.1 a P2.20)

Apresentam-se vários problemas relacionados com o cálculo de coeficientes de convecção e temperaturas em escoamentos fluidos, discutindo-se as hipóteses, a resolução e resultados. Alguns exemplos tratarão, com muitas simplificações, da obtenção de uma solução analítica para a distribuição de temperaturas num escoamento. São também apresentadas soluções numéricas em casos particulares.

P2.1



O teto de uma carruagem de comboio pode considerar-se uma placa plana com um comprimento de 8 m, e desloca-se na horizontal em ar calmo, à velocidade v . A temperatura do ar é de 25°C , sendo as suas propriedades a esta temperatura: $k=0,0259$ W/mK, $\nu=1,589 \times 10^{-5}$ m²/s, $Pr=0,728$. O teto fica a uma temperatura mais elevada, devido à incidência da radiação solar. Analise a variação do coeficiente de convecção no teto para velocidades entre 10 e 120 km/h.

Resolução e discussão

Temos então um escoamento de ar paralelo a uma placa plana, cujo coeficiente pode ser calculado como visto em 2.2. As propriedades físicas do ar a usar deveriam ser tomadas à temperatura média entre a superfície do teto e o ar longe desta (25°C); no entanto, não se conhecendo a temperatura do teto, são usadas propriedades a 25°C , o que não alterará significativamente os valores do coeficiente de convecção, já que as propriedades do ar não variam apreciavelmente com a temperatura, nas condições descritas.

Começemos por avaliar o regime de escoamento nas diversas situações (velocidades), através do número de Reynolds para o comprimento da placa:

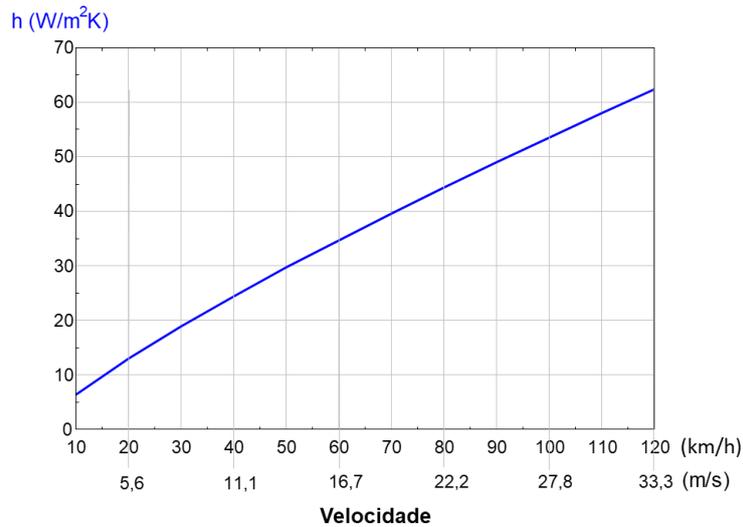
$$Re_L = \frac{v_\infty L}{\nu} = \frac{v_\infty \times 8}{1,589 \times 10^{-5}} = 5,035 \times 10^5 v_\infty$$

O seu valor, para velocidades entre 10 e 120 km/h (2,8 e 33,3 m/s), estará compreendido entre $1,400 \times 10^6$ e $1,678 \times 10^7$. O regime turbulento verifica-se a partir de 5×10^5 , o que significa que na gama de velocidades considerada existirá sempre regime turbulento (depois da zona inicial da placa, em regime laminar).

A correlação vista para o regime turbulento, válida para temperatura ou fluxo constante na parede, é a equação (2.11), da qual resulta

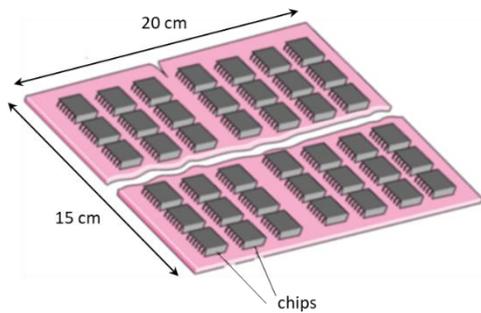
$$\bar{h} = \frac{k}{L} (0,037 Re_L^{4/5} - 871) Pr^{1/3} = 3,927 v_\infty^{0,8} - 2,537$$

Esta variação está representada graficamente na figura seguinte, na qual se vê que na gama de velocidades considerada o coeficiente de convecção varia entre 6 e 62 W/m²°C. O efeito do aumento da velocidade está expresso no expoente 0,8; um aumento da velocidade para o dobro traduz-se num aumento de cerca de $2^{0,8}$ ou 1,74 vezes do coeficiente de convecção.



Só se verificará regime laminar em toda a placa (teto) para uma velocidade muito reduzida, igual ou inferior a $0,993 \text{ m/s}$ ($3,6 \text{ km/h}$). Para essa velocidade o coeficiente de convecção é significativamente menor, obtendo-se um valor de $1,4 \text{ W/m}^2\text{C}$. Note-se também que no caso de regime laminar em toda a placa o efeito do aumento da velocidade é menor, proveniente do expoente $0,5$ da equação (2.7): nessas condições, um aumento da velocidade para o dobro traduz-se num aumento de $1,41$ vezes do coeficiente de convecção.

P2.2



Uma placa de um circuito integrado com 15 cm x 20 cm dissipa uniformemente 30 W, para uma corrente de ar a 20°C e a 5 m/s, que circula paralelamente à placa, na direção de menor dimensão ($k=0,0265$ W/mK, $\nu=1,655 \times 10^{-5}$ m²/s, $Pr=0,7268$).

Desprezando a transferência de calor na face posterior da placa e admitindo regime turbulento (efeito dos “chips”), calcule a temperatura dos componentes na zona de entrada e na zona de saída do escoamento.

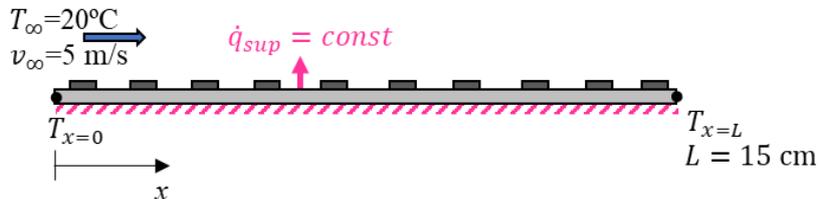
A direção do escoamento de ar será a mais adequada para limitar a temperatura máxima verificada na placa?

Resolução e discussão

Temos convecção forçada da placa para o ar, que se escoia paralelamente a esta. A superfície da placa fornece um fluxo constante ao ar, que se pode facilmente calcular, considerando a face inferior isolada termicamente:

$$\dot{q}_{sup} = \frac{\dot{Q}}{A_{placa}} = \frac{30}{0,15 \times 0,20} = 1000 \text{ W/m}^2$$

A figura seguinte resume as condições do problema.



A diferença de temperatura entre um ponto da placa (x) e o ar longe da placa depende do coeficiente de convecção nesse ponto (local):

$$T_x - T_\infty = \frac{\dot{q}_{sup}}{h_x}$$

Na zona de entrada ($x=0$) tem-se $Nu_x=0$, e h_x tende para infinito, pelo que $T_{x=0}$ será igual a T_∞ , ou seja, 20°C.

Na zona de saída ($x=L=0,15$ m) vamos calcular o número de Reynolds:

$$Re_L = \frac{v_\infty L}{\nu} = \frac{5 \times 0,15}{1,655 \times 10^{-5}} = 4,532 \times 10^4$$

Apesar de numa placa plana esse valor corresponder a regime laminar, a presença dos “chips” induz o aparecimento da turbulência, pelo que usaremos a equação (2.10) para calcular o valor do coeficiente à saída:

$$Nu_{x=L} = 0,0308 Re_L^{4/5} Pr^{1/3} = 0,0308 \times (4,532 \times 10^4)^{0,8} \times 0,7268^{1/3} = 147$$

$$h_L = \frac{Nu_{x=L} k}{L} = \frac{147 \times 0,0265}{0,15} = 26 \text{ W/m}^2\text{°C}$$

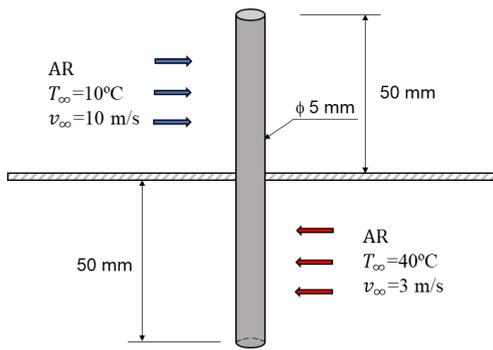
vindo então

$$T_{x=L} = T_\infty + \frac{\dot{q}_{sup}}{h_L} = 20 + \frac{1000}{26} = 58,5^\circ\text{C}$$

Note-se que se se considerasse o escoamento como laminar, usando a equação (2.6) obter-se-ia $Nu_{x=L} = 86,7$, vindo $h_L = 15,3 \text{ W/m}^2\text{C}$ e $T_{x=L} = 85,4^\circ\text{C}$. A temperatura à saída seria quase 27°C mais elevada.

Se a direção do escoamento de ar fosse perpendicular, com o escoamento feito ao longo da maior dimensão da placa (20 cm), e com turbulência, ter-se-iam $Nu_{x=L} = 185$, $h_L = 24,5 \text{ W/m}^2\text{C}$ e $T_{x=L} = 60,8^\circ\text{C}$. O menor coeficiente à saída (comparado com o escoamento segundo a menor dimensão) faz com que a temperatura à saída seja mais elevada (mais $2,3^\circ\text{C}$), pelo que será mais adequada a direção inicial para limitar a temperatura máxima na placa (admitindo sempre um escoamento paralelo à placa).

P2.3



Para transferir calor entre 2 correntes de ar é colocada uma vareta de alumínio ($k=177 \text{ W/mK}$) que atravessa a parede que separa os fluidos. A vareta tem 100 mm de comprimento e 5 mm de diâmetro, e a parede tem espessura desprezável.

Calcule a potência calorífica transferida pela vareta. Será que existe um comprimento de contacto com cada fluido ótimo, para o mesmo comprimento total da vareta?

Resolução e discussão

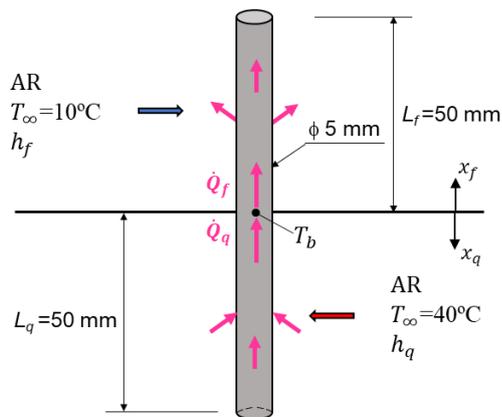
Vamos considerar que ambos os fluidos transferem calor com a vareta num escoamento perpendicular ao eixo desta, e a velocidade constante em toda a extensão de contacto – junto à parede a velocidade não se reduz. Quanto às propriedades físicas dos fluidos, e apesar da pequena diferença, considera-se o seu efeito. Admitem-se à pressão atmosférica e a uma temperatura média entre a vareta e o respetivo fluido longe dela: a vareta é considerada à temperatura média de 25°C , pelo que se tomam propriedades para o fluido quente a $32,5^\circ\text{C}$ e para o fluido frio a $17,5^\circ\text{C}$.

Têm-se então

para o fluido quente: $k_q=0,02671 \text{ W/mK}$, $\nu_q=1,644 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $Pr_q=0,706$;

para o fluido frio: $k_f=0,02554 \text{ W/mK}$, $\nu_f=1,504 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $Pr_f=0,710$.

Quanto à vareta, ela recebe calor do fluido quente e conduz o calor ao longo da sua extensão, transferindo-o depois para o fluido frio. Vamos considerar a transferência em regime permanente, com a temperatura variando apenas ao longo do eixo, atendendo ao reduzido diâmetro e elevada condutibilidade térmica. A vareta conduz o calor em simultâneo com a convecção superficial, pelo que se comporta como um conjunto de 2 alhetas em série. A figura seguinte esquematiza a situação. Na secção intermédia da vareta (base das 2 “alhetas”) a potência calorífica recebida do fluido quente (\dot{Q}_q) iguala a que sai para o fluido frio (\dot{Q}_f).



Embora se pudesse considerar a transferência de calor nos topos da vareta, como a sua área é muito pequena face à área da superfície lateral da vareta (cerca de 2,5%) ela vai ser desprezada, o que permite simplificar as equações a usar, considerando alhetas com o topo isolado. Então, recorrendo à equação (1.31)

$$\dot{Q}_q = (T_b - T_{q\infty})\sqrt{h_q P k A_s} \tanh(m_q L_q)$$

$$\dot{Q}_f = (T_b - T_{f\infty})\sqrt{h_f P k A_s} \tanh(m_f L_f)$$

com

$$m_q = \sqrt{\frac{h_q P}{k A_s}}, \quad m_f = \sqrt{\frac{h_f P}{k A_s}} \quad \text{e} \quad L_q = L_f = 0,050 \text{ m}$$

O cálculo dos dois coeficientes de convecção permite, pela igualdade das 2 potências, a obtenção da temperatura na base (T_b), e por substituição o valor dessa potência. Então vamos calcular os coeficientes, considerando escoamentos perpendiculares ao eixo de um cilindro, através da equação (2.12) e Tabela 2.1. Temos

$$Re_{D,q} = \frac{v_{q\infty} D}{\nu_q} = \frac{3 \times 0,005}{1,644 \times 10^{-5}} = 912 \quad \Rightarrow \quad \overline{Nu}_{D,q} = 0,683 Re_{D,q}^{0,466} Pr_q^{1/3} = 14,6$$

$$Re_{D,f} = \frac{v_{f\infty} D}{\nu_f} = \frac{10 \times 0,005}{1,504 \times 10^{-5}} = 3324 \quad \Rightarrow \quad \overline{Nu}_{D,f} = 0,683 Re_{D,f}^{0,466} Pr_f^{1/3} = 26,7$$

e

$$h_q = \frac{\overline{Nu}_{D,q} k_q}{D} = 78 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$h_f = \frac{\overline{Nu}_{D,f} k_f}{D} = 136 \text{ W/m}^2\text{K}$$

vindo então

$$m_q = \sqrt{\frac{h_q P}{k A_s}} = \sqrt{\frac{78 \times \pi \times 0,005}{177 \times \pi \times 0,005^2 / 4}} = 18,78$$

$$m_f = \sqrt{\frac{h_f P}{k A_s}} = \sqrt{\frac{136 \times \pi \times 0,005}{177 \times \pi \times 0,005^2 / 4}} = 24,79$$

Podemos agora igualar as potências e obter T_b . Note-se que as potências têm sinais contrários, como visto anteriormente: a “alhetas” quente recebe calor, enquanto a “alhetas” fria perde calor:

$$\dot{Q}_f = -\dot{Q}_q$$

$$(T_b - T_{f\infty})\sqrt{h_f P k A_s} \tanh(m_f L_f) = -(T_b - T_{q\infty})\sqrt{h_q P k A_s} \tanh(m_q L_q)$$

vindo então $T_b = 21,9^\circ\text{C}$. Por substituição vem

$$\begin{aligned} \dot{Q}_f &= (T_b - T_{f\infty})\sqrt{h_f P k A_s} \tanh(m_f L_f) = \\ &= (21,9 - 10)\sqrt{136 \times \pi \times 0,005 \times 177 \times \pi \times 0,005^2 / 4} \times \tanh(24,79 \times 0,05) = \\ &= 0,867 \text{ W} \end{aligned}$$

Podemos também calcular as temperaturas nos topos da vareta. Recorrendo à equação (1.30) temos:

$$\begin{aligned} T_{x_q=L_q} &= T_{q\infty} + (T_b - T_{q\infty}) \frac{\cosh[m_q(L_q - L_q)]}{\cosh(m_q L_q)} = \\ &= 40 + (21,9 - 40) \frac{1}{\cosh(18,78 \times 0,05)} = 27,7^\circ\text{C} \end{aligned}$$

$$T_{x_f=L_f} = T_{f\infty} + (T_b - T_{f\infty}) \frac{\cosh[m_f(L_f - L_f)]}{\cosh(m_f L_f)} =$$

$$= 10 + (21,9 - 10) \frac{1}{\cosh(24,79 \times 0,05)} = 16,4^\circ\text{C}$$

ou seja, existe uma variação de temperatura de $11,3^\circ\text{C}$ ao longo da vareta.

O valor da potência trocada pela vareta pode parecer muito baixo, mas é necessário compará-lo com o da potência que se transfere pela parede que separa os 2 fluidos. Assumindo que nos 2 fluidos existe um canal entre 2 placas (com uma comum, de separação entre os fluidos), com uma espessura de 50 mm cada, e com as velocidades médias indicadas, os coeficientes de convecção na parede, admitindo camadas limites desenvolvidas, serão aproximadamente $h_q = 10 \text{ W/m}^2\text{K}$ e $h_f = 40 \text{ W/m}^2\text{K}$. Desprezando a resistência térmica da parede, tem-se um $U = 8 \text{ W/m}^2\text{K}$; com um fluido a 40°C e outro a 10°C é necessária uma área de $0,0036 \text{ m}^2 = 36 \text{ cm}^2$. Essa área é bastante superior à área (da secção) ocupada pela vareta, pelo que a transferência de calor através da vareta é mais eficiente que através da parede de separação.

Para analisar o efeito de variar o comprimento de contacto com cada fluido, vamos admitir que L_q e L_f podem variar, mantendo-se a sua soma igual ao comprimento total de 100 mm. Podemos analisar a transferência global de calor do fluido quente para o frio através da consideração de 2 resistências térmicas: as resistências em série das 2 “alhetas”. Usando a definição de resistência de uma alheta vista na equação (1.34), pode escrever-se

$$R_{global} = \frac{1}{\eta_{alh,q} h_q A_{conv,q}} + \frac{1}{\eta_{alh,f} h_f A_{conv,f}}$$

sendo o rendimento das 2 alhetas, com trocas no topo desprezáveis, definido pela equação (1.35):

$$\eta_{alh,q} = \frac{\tanh(m_q L_q)}{m_q L_q} \quad \text{e} \quad \eta_{alh,f} = \frac{\tanh(m_f L_f)}{m_f L_f}$$

Então vem para a resistência global:

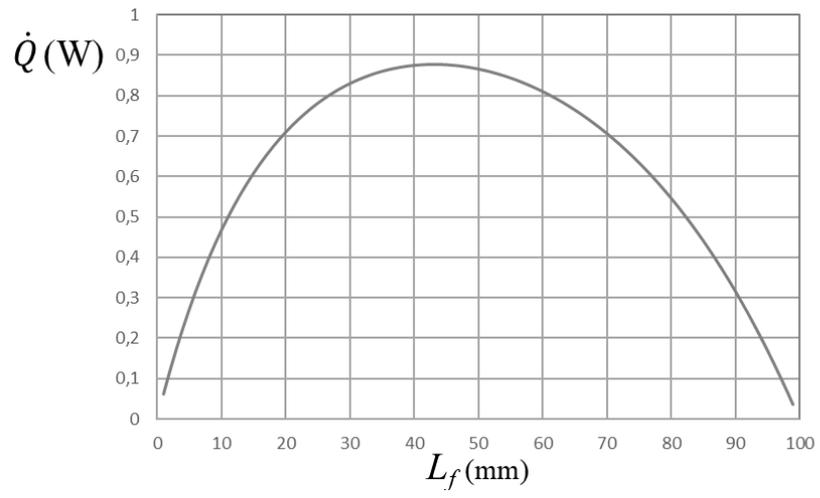
$$R_{global} = \frac{m_q L_q}{\tanh(m_q L_q) h_q \pi D L_q} + \frac{m_f L_f}{\tanh(m_f L_f) h_f \pi D L_f}$$

$$R_{global} = \frac{18,78}{\tanh(18,78 L_q) \times 78 \times \pi \times 0,005} + \frac{24,79}{\tanh(24,79 L_f) \times 136 \times \pi \times 0,005}$$

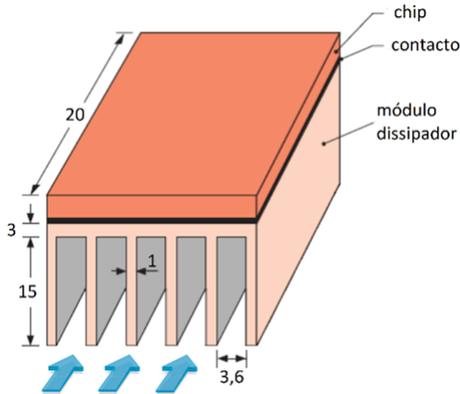
a partir da qual se pode calcular a potência trocada com:

$$\dot{Q} = \frac{40-10}{R_{global}} = 30 / \left(\frac{15,33}{\tanh(18,78 L_q)} + \frac{11,60}{\tanh(24,79 L_f)} \right)$$

Ao variarem L_q e L_f , mantendo a sua soma igual a 100 mm, verifica-se que existe um mínimo para a resistência global, a que corresponde um máximo para a potência. O gráfico seguinte mostra os resultados. O ótimo verifica-se para $L_f \cong 43 \text{ mm}$ e $L_q \cong 57 \text{ mm}$, sendo a potência máxima trocada de $0,878 \text{ W}$. Em vez de usar a mesma área de transferência da vareta nos 2 fluidos, é preferível usar uma área um pouco maior no fluido com pior coeficiente de convecção, o que desvia o ponto ótimo do ponto médio (50 mm).



P2.4

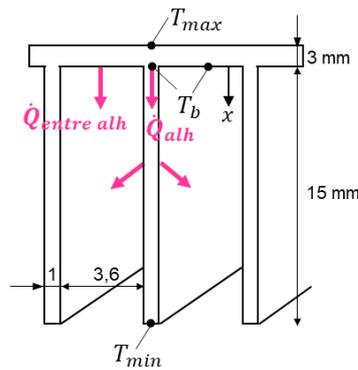


O “chip” de silício da figura está soldado a um módulo dissipador de calor em alumínio ($k=180 \text{ W/mK}$). O ar, a 20°C e 3 m/s , move-se na direção indicada na figura. Em funcionamento o “chip” liberta uma potência calorífica uniforme de 10 W na área de contacto.

Calcule o coeficiente de convecção médio entre o módulo e o ar, e a variação de temperatura no módulo entre a área de contacto e a zona mais fria. Despreze a radiação térmica.

Resolução e discussão

O dissipador é composto por várias placas dissipadoras (alhetas retangulares), transferindo-se calor pelas alhetas e pela área entre alhetas, por convecção para o escoamento de ar. Vamos admitir que, atendendo à pequena espessura das placas (alhetas), se pode desprezar a aceleração do fluido no espaço entre elas. Vamos também considerar que a temperatura nas placas e na base só varia na direção x representada na figura seguinte.



Para as propriedades do ar vamos considerar uma temperatura de 300 K , não sendo conhecida a temperatura das superfícies do dissipador, inevitavelmente mais altas. No entanto, as propriedades do ar não variam de modo significativo. Assim, teremos: $k=0,0263 \text{ W/mK}$, $\mu=184,6 \times 10^{-7} \text{ Ns/m}^2$, $\rho=1,1614 \times 10^{-7} \text{ kg/m}^3$, $Pr=0,707$.

Quanto ao escoamento, poderemos considerá-lo como paralelo a placas planas. No entanto, a proximidade das alhetas pode provocar um efeito semelhante ao de um escoamento interno. Vamos avaliar a importância desse efeito calculando a espessura das camadas limite para um escoamento paralelo a uma placa, com um comprimento de 20 mm (comprimento ao longo do dissipador). O número de Reynolds para o comprimento de escoamento é

$$Re_L = \frac{\rho v_\infty L}{\mu} = \frac{1,164 \times 3 \times 0,020}{184,6 \times 10^{-7}} = 3775$$

pelo que toda a placa se encontra em regime laminar ($Re_L < 5 \times 10^5$).

Consultando [1], obtêm-se as expressões seguintes para cálculo da espessura das camadas limite dinâmica (δ) e térmica (δ_t), em regime laminar:

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}}$$

$$\delta/\delta_t \cong Pr^{1/3}$$

que nos conduzem a

$$\delta_L = \frac{5L}{\sqrt{Re_L}} = 5 \times 0,02 \times 3775^{-0,5} = 0,00163 \text{ m}$$

$$\delta_{t,L} \cong \frac{\delta_L}{Pr^{1/3}} = \frac{0,00163}{0,707^{1/3}} = 0,0018 \text{ m}$$

Assim, apenas a camada limite térmica atinge meia distância entre placas, à saída, pelo que é perfeitamente razoável considerar o escoamento entre placas como um escoamento externo.

Para calcular o coeficiente de convecção médio no dissipador podemos recorrer às equações (2.7) ou (2.8), para o caso de um escoamento paralelo a uma placa em regime laminar. A primeira é válida para temperatura superficial constante (na direção do escoamento) e a segunda para fluxo superficial constante. A diferença entre ambas é pequena, como visto em 2.2, e na realidade neste caso nenhuma delas se verifica. Tendo em conta a potência dissipada pelo “chip” uniforme na área de contacto, vamos optar pela (2.8), que conduz a

$$\overline{Nu}_L = 0,680 Re_L^{1/2} Pr^{1/3} = 0,680 \times 3775^{1/2} 0,707^{1/3} = 36,3$$

vindo

$$\overline{h} = \frac{\overline{Nu}_L k}{L} = \frac{36,3 \times 0,0263}{0,02} = 48 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Quanto à potência dissipada por uma alheta podemos recorrer à equação (1.35), desprezando as trocas no topo, o que é razoável considerando a sua pequena área (3% da área de convecção da alheta):

$$m = \sqrt{\frac{\overline{h}P}{kA_s}} = \sqrt{\frac{48 \times (2 \times 0,02 + 2 \times 0,001)}{180 \times 0,001 \times 0,02}} = 23,6 \text{ m}^{-1}$$

$$\eta_{alh} = \frac{\tanh(mL_{alh})}{mL_{alh}} = \frac{\tanh(23,6 \times 0,015)}{23,6 \times 0,015} = 0,960$$

Podemos expressar a potência total transferida, considerando a dissipada nas alhetas e a dissipada na área da base entre alhetas

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{total} &= \dot{Q}_{alh} + \dot{Q}_{entre\ alh} = (n_{alh} \eta_{alh} \overline{h} A_{conv,1alh} + \overline{h} A_{entre\ alh}) \times (T_b - T_\infty) = \\ &= (6 \times 0,96 \times (2 \times 0,02 + 2 \times 0,001) \times 0,015 + 5 \times 0,02 \times 0,0036) \times 48 \times \\ &\quad \times (T_b - 20) = 10 \text{ W} \end{aligned}$$

Então obtém-se $T_b = 72,2^\circ\text{C}$. A temperatura no topo da alheta (T_{min}) pode obter-se da equação (1.30)

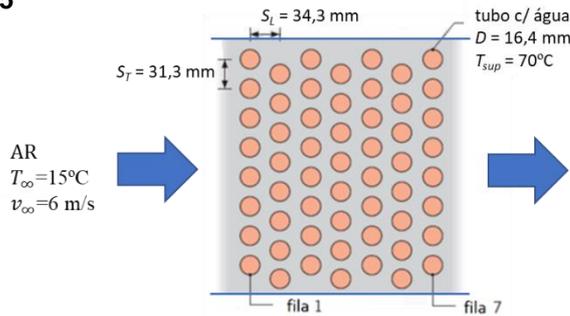
$$\begin{aligned} T_{min} &= T_{x=L_{alh}} = T_\infty + (T_b - T_\infty) \frac{\cosh[m(L_{alh} - L_{alh})]}{\cosh(mL_{alh})} = \\ &= 20 + (72,2 - 20) \frac{1}{\cosh(23,6 \times 0,015)} = 69,1^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Quanto à temperatura máxima no módulo dissipador (T_{max}), através da condução 1D numa placa de 3 mm (entre o contacto e as alhetas):

$$\dot{Q}_{total} = \frac{k}{e} A (T_{max} - T_b) = \frac{180}{0,003} \times 0,02 \times 0,024 \times (T_{max} - 72,2) = 10 \text{ W}$$

pelo que $T_{max} = 72,5^\circ\text{C}$.

P2.5



O feixe de tubos da figura é usado para aquecer ar ambiente, através de água quente que circula no interior dos tubos, e mantém a superfície destes a 70°C. Antes do feixe o ar está a 15°C e circula a 6 m/s.

Calcule a potência transferida para o ar e a sua temperatura média de saída.

Faça uma análise do efeito do número de filas (5 a 25) e da velocidade do ar (5 a 20 m/s) na potência e na temperatura de saída.

Propriedades do ar a 15°C: $k=0,0253$ W/mK, $\nu=1,482 \times 10^{-5}$ m²/s, $Pr=0,710$, $\rho=1,217$ kg/m³, $c_p=1007$ J/kgK; a 70°C: $Pr=0,701$).

Resolução e discussão

Temos um escoamento perpendicular a um feixe de tubos, mas em que se quer contabilizar o aumento de temperatura do escoamento externo ao feixe (ar). Ou seja, o escoamento do ar é externo em relação ao feixe, mas interno em relação à conduta onde ele circula. Admite-se igual velocidade em todos os pontos da secção da conduta em que circula o ar antes deste atingir o feixe (efeito da parede desprezável). Faremos os cálculos por unidade de profundidade (perpendicular ao plano da figura), uma vez que essa dimensão não é conhecida.

Vamos usar a correlação (2.13) e a Tabela 2.2 para calcular o coeficiente de convecção entre os tubos e o ar. O número de Nusselt é dado por

$$\overline{Nu}_D = C_1 C_2 Re_{D,max}^m Pr^{0,36} \left(\frac{Pr}{Pr_{sup}} \right)^{1/4}$$

sendo $Re_{D,max}$ calculado com a velocidade máxima no interior do feixe. Como o passo transversal (S_T) é menor que o longitudinal (S_L), e menor que o diagonal, a secção de passagem mínima é a transversal e a velocidade máxima verifica-se nessa secção. O seu valor é então

$$v_{max} = \frac{S_T}{S_T - D} v_{\infty} = \frac{31,3}{31,3 - 16,4} \times 6 = 12,6 \text{ m/s}$$

e

$$Re_{D,max} = \frac{v_{max} D}{\nu} = \frac{12,6 \times 0,0164}{1,482 \times 10^{-5}} = 13943$$

Para cálculo de C_1 e C_2 , usando a Tabela 2.2, temos

$$\frac{S_T}{S_L} = 0,91 < 2 \Rightarrow C_1 = 0,35 \left(\frac{S_T}{S_L} \right)^{1/5} = 0,34 \text{ e } m = 0,6$$

e quanto a C_2 , havendo 7 filas $C_2 = 0,95$.

Então

$$\overline{Nu}_D = 0,34 \times 0,95 \times 13943^{0,6} \times 0,710^{0,36} \times \left(\frac{0,710}{0,701} \right)^{1/4} = 87,9$$

e

$$\overline{h}_{ar} = \frac{\overline{Nu}_D k}{D} = \frac{87,9 \times 0,0253}{0,0164} = 136 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Note-se que, com a correlação usada, seria mais correto usar as propriedades (com exceção de Pr_{sup}) à temperatura média entre a média do ar (não conhecida) e a da superfície dos tubos. Para uma maior precisão, depois de calculada a temperatura de saída poderão refazer-se os cálculos. No entanto, para um fluido em que as propriedades pouco variam com a temperatura – caso do ar à pressão atmosférica – o erro cometido é menor do que o erro associado à correlação para cálculo do Nu .

Para determinar a temperatura de saída podemos considerar um balanço como feito em 2.3, para um elemento de fluido que troca calor com uma área superficial elementar dA_{sup} – equação (2.25):

$$\dot{M}c_p dT_m = \bar{h}_{ar} (T_{sup} - T_m) dA_{sup}$$

que integrada entre $A_{sup}=0$ ($T=T_{ent}$) e $A_{sup}=A_{total}$ ($T=T_{sai}$) dá uma relação semelhante a (2.26) para a temperatura média de saída do ar:

$$\frac{(T_{sup}-T_{sai})}{(T_{sup}-T_{ent})} = \exp\left(-\frac{\bar{h}_{ar}N_t\pi D l}{\dot{M}c_p}\right)$$

considerando a área de todos os N_t tubos do feixe, com a largura l (aqui considerada unitária).

Considerando o caudal por unidade de largura vem:

$$\frac{(70-T_{sai})}{(70-15)} = \exp\left(-\frac{136 \times 56 \times \pi \times 0,0164}{1,217 \times 6 \times 0,0313 \times 8 \times 1007}\right) \Rightarrow T_{sai} = 25,6^\circ\text{C}$$

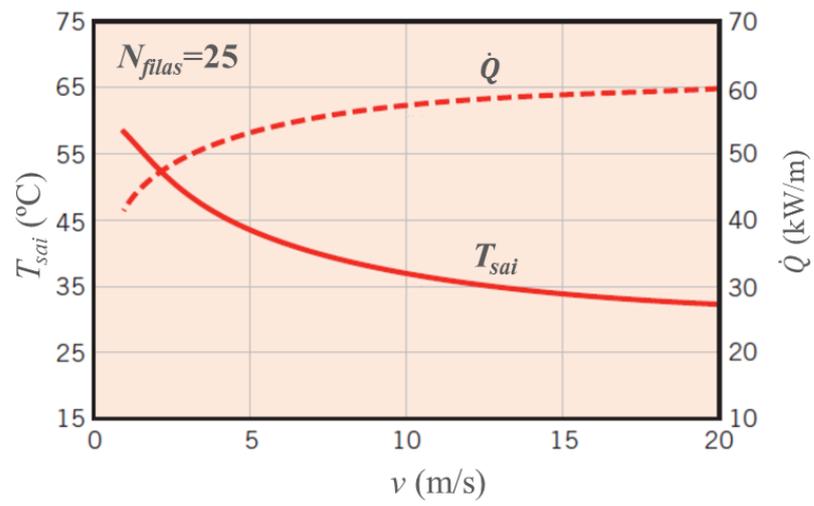
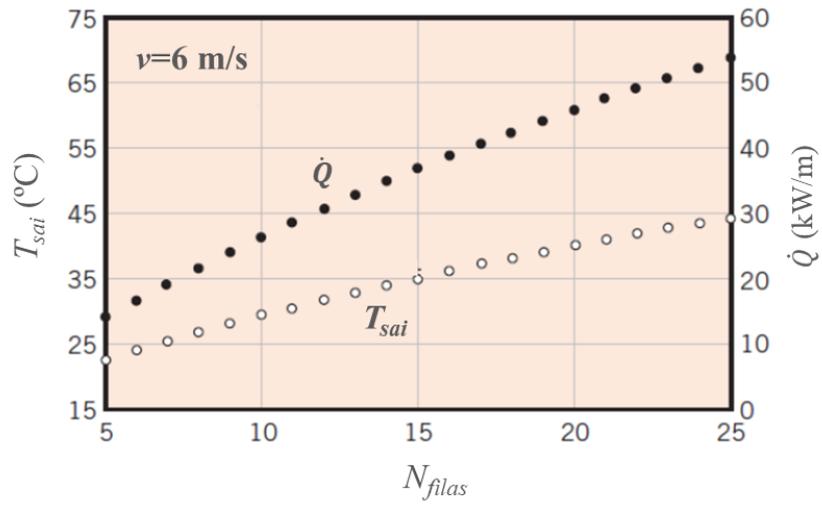
Quanto à potência recebida pelo ar, a partir da variação da temperatura:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \dot{M}c_p (T_{sai} - T_{ent}) = 1,217 \times 6 \times 0,0313 \times 8 \times 1007 \times (25,6 - 15) = \\ &= 19,5 \text{ kW/m} \end{aligned}$$

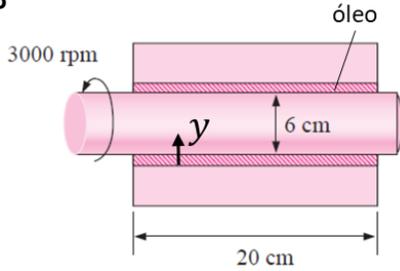
Para analisar o efeito do número de filas ($N_{filas} = 5$ a 25) e da velocidade do ar ($v = 5$ a 20 m/s) na potência e na temperatura de saída, podem repetir-se os cálculos anteriores para diferentes números de filas e velocidades. Os resultados estão representados nos gráficos seguintes.

Ao aumentar o número de filas (área de transferência) a temperatura de saída tende para 70°C (máximo possível), embora aumente cada vez menos. A partir de certo número não há grande vantagem em aumentar mais N_{filas} . Uma evolução semelhante acontece com a potência, que aumenta com o aumento da variação de temperatura do ar entre a entrada e a saída.

Ao aumentar a velocidade do ar, mantendo o número de filas de tubos, diminui a temperatura de saída. O caudal aumenta e o produto do caudal pela diferença de temperatura também aumenta, pelo que a potência aumenta. No entanto, a potência aumenta menos que com o aumento do número de filas, e com a agravante de a perda de carga (potência de ventilação) aumentar fortemente com a velocidade; a potência de ventilação também aumenta ao aumentar o número de filas, mas não tão acentuadamente. Assim, para aumentar a potência a melhor opção é aumentar o número de filas. Se se pretender aumentar a temperatura de saída e a potência, então aumentar o número de filas é a única solução.



P2.6



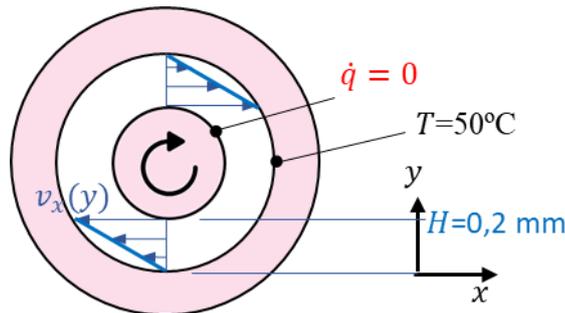
Entre o veio e o rolamento da figura existe uma película de óleo de 0,2 mm ($k=0,17 \text{ W/mK}$, $\mu=0,05 \text{ Ns/m}^2$). Em condições permanentes o veio atingiu o equilíbrio térmico com o óleo, podendo desprezar-se o calor transferido entre ambos, enquanto o rolamento é mantido a 50°C (arrefecido por água).

Admitindo desprezável o efeito da curvatura na camada de óleo (pequena espessura), mas considerando a importância da viscosidade do fluido, calcule a temperatura máxima no óleo e o calor transferido para o rolamento.

Resolução e discussão

Vamos recorrer à equação fundamental para um escoamento – equação da energia – para resolver o problema, considerando o efeito da dissipação viscosa e introduzindo várias simplificações. A primeira tem a ver com a geometria: atendendo à pequena espessura da película de óleo, vamos admitir que se trata de um escoamento plano – entre 2 placas planas, estando uma parada e outra em movimento; esse escoamento é conhecido por escoamento de Couette, sabendo-se da Mecânica de Fluidos que o perfil de velocidades varia linearmente desde 0 (na placa parada) até à velocidade da placa em movimento.

A figura seguinte representa esquematicamente o escoamento da película de óleo e o problema.



O perfil de velocidades pode então escrever-se como

$$v_x = v_{max} \frac{y}{H} = \pi \times 0,06 \times \frac{3000}{60} \times \frac{y}{0,2} = 47,1 \times 10^3 \times y$$

sendo então a velocidade máxima do óleo (junto ao veio) de 9,4 m/s (33,9 km/h).

A equação da energia vista (equação 2.2), aplicada a este escoamento, não contém a componente y da velocidade, e substituindo a função dissipação viscosa pelo quadrado do gradiente de velocidade em y , [1], obtém-se

$$\rho c_p \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2$$

Vamos agora introduzir simplificações que, sendo razoáveis, permitam obter uma solução analítica para o perfil de temperaturas no óleo. Vamos considerar que o termo do transporte convectivo ($v_x \partial T / \partial x$) e o termo de condução segundo x têm muito menos peso (desprezável) que os termos de condução segundo y e de dissipação viscosa. Assim, a equação reduz-se a

$$k \left(\frac{d^2 T}{dy^2} \right) + \mu \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2 = 0$$

que traduz uma variação da temperatura unicamente com y . A integração conduz a uma variação quadrática:

$$\frac{d^2T}{dy^2} = -\frac{\mu v_{max}^2}{k H^2} \Rightarrow T = -\frac{\mu v_{max}^2}{k H^2} \frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

As condições fronteira, que permitem calcular C_1 e C_2 , são a temperatura de 50°C em $y=0$ e fluxo de calor (dT/dy) nulo em $y=H$, que conduzem a

$$T = T_{y=0} + \frac{\mu v_{max}^2}{k H} \left(y - \frac{y^2}{2H} \right)$$

vindo então

$$T_{max} = T_{y=H} = T_{y=0} + \frac{\mu v_{max}^2}{2k} = 50 + \frac{0,05 \times 9,425^2}{2 \times 0,17} = 63,1^\circ\text{C}$$

Apesar da muito reduzida espessura da película de óleo (0,2 mm), a dissipação viscosa gera calor suficiente para um aumento de $13,1^\circ\text{C}$.

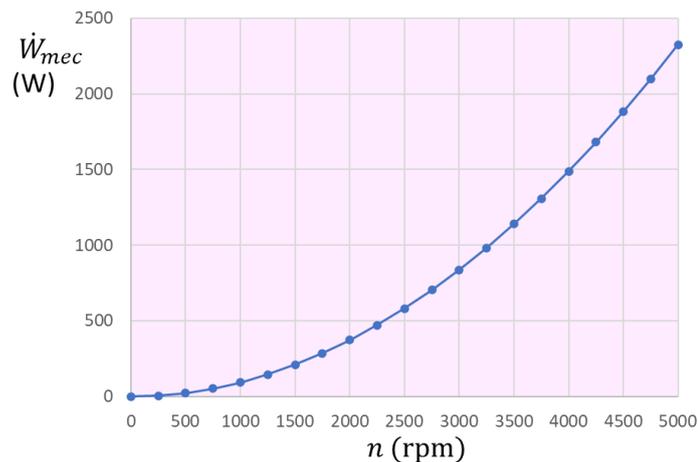
Quanto à potência calorífica trocada com o rolamento, pode calcular-se através de

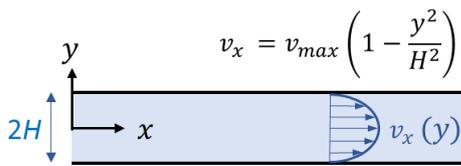
$$\dot{Q}_{y=0} = -kA \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = -kA \frac{\mu v_{max}^2}{kH} = -\pi \times 0,06 \times 0,20 \times \frac{0,05 \times 9,425^2}{0,0002} = -837 \text{ W}$$

expressando o sinal negativo o facto de a potência ser no sentido de y negativo.

Vamos ainda analisar o efeito da variação da velocidade de rotação do veio na potência mecânica dissipada por atrito no óleo. Note-se que essa potência, necessária ao acionamento do veio, é exatamente igual à potência calorífica transferida (a energia é a mesma).

Trata-se de repetir o cálculo para diferentes rotações/velocidades. Como mostra a figura seguinte (para rotações até 5000 rpm) a potência dissipada varia com o quadrado da rotação (como mostrava a equação anterior).



P2.7

Para um escoamento laminar desenvolvido entre 2 placas planas, avalie a importância da dissipação viscosa na distribuição de temperatura no fluido.

O perfil desenvolvido de velocidades, conhecido da Mecânica de Fluidos está indicado na figura.

Considere escoamentos típicos de ar, água e óleo.

Resolução e discussão

Consideremos então um escoamento entre placas planas de um fluido incompressível, em regime laminar e com camadas limite desenvolvidas. Com componente da velocidade apenas segundo x e desprezando a condução e o transporte convectivo segundo x , como no problema anterior (P2.6), obtêm-se

$$k \left(\frac{d^2 T}{dy^2} \right) + \mu \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2 = 0$$

e

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = - \frac{4\mu v_{max}^2}{k H^4} y^2$$

As condições nas fronteiras a considerar serão uma temperatura junto à parede das placas igual a T_{sup} (igual nas 2 placas). Tais condições conduzem a

$$(T - T_{sup})_{max, y=0} = \frac{\mu v_{max}^2}{3k}$$

Assim, o aumento de temperatura devido à dissipação viscosa depende do quadrado da velocidade, da viscosidade e (inversamente) da condutibilidade térmica.

Vejamos então o que pode acontecer com fluidos e condições típicas correntes.

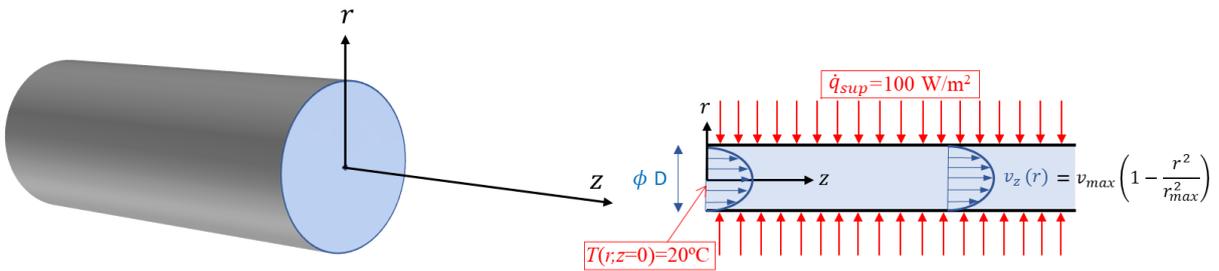
Num escoamento de ar com $v_{max}=5$ m/s, com viscosidade $\mu=184,6 \times 10^{-7}$ Ns/m² e $k=0,0263$ W/mK, vem $(T - T_{sup})_{max} = 0,006^\circ\text{C}$; já a 360 km/h (100 m/s) virá $(T - T_{sup})_{max} = 2,3^\circ\text{C}$.

Num escoamento de água com $v_{max}=2$ m/s, com viscosidade $\mu=1,08 \times 10^{-3}$ Ns/m² e $k=0,6$ W/mK, vem $(T - T_{sup})_{max} = 0,002^\circ\text{C}$; já a 30 m/s virá $(T - T_{sup})_{max} = 0,5^\circ\text{C}$.

Num escoamento de óleo com $v_{max}=2$ m/s, com viscosidade $\mu=0,05$ Ns/m² e $k=0,17$ W/mK, vem $(T - T_{sup})_{max} = 0,4^\circ\text{C}$; já a 10 m/s virá $(T - T_{sup})_{max} = 9,8^\circ\text{C}$.

Assim, para estes fluidos e velocidades mais baixas, o efeito da dissipação viscosa pode considerar-se desprezável. Tal já não acontece para aplicações com velocidades elevadas ou viscosidades elevadas. Note-se que não foi considerada a turbulência, que tem relevância a velocidades mais elevadas, embora não alterando as principais conclusões.

P2.8



Considere um escoamento de ar no interior de um tubo de 20 cm de diâmetro, e 2 m de comprimento, com uma velocidade no eixo de 0,3 m/s. À entrada o perfil de velocidades já se encontra desenvolvido, e a temperatura do ar é uniforme e igual a 20°C.

Sabendo que a superfície do tubo aquece o fluido com um fluxo constante de 100 W/m², calcule o coeficiente de convecção interior. Conhecendo o perfil de velocidades desenvolvido em função do raio, avalie a distribuição de temperaturas no fluido com um método numérico. Compare o cálculo do coeficiente de convecção obtido por este método com o anterior.

Propriedades a considerar para o ar: $\rho=1,2 \text{ kg/m}^3$, $c_p=1005 \text{ J/kgK}$, $k=0,025 \text{ W/mK}$, $\mu=1,8 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$, $Pr=0,710$.

Resolução e discussão

Este é um escoamento interno, num tubo de secção circular. Pode avaliar-se o número de Nusselt, e o coeficiente de convecção, a partir do número de Reynolds. Para este interessa a velocidade média na secção do tubo, que é igual a metade da velocidade máxima (no eixo). Então tem-se:

$$Re_D = \frac{\rho v_m D}{\mu} = \frac{1,2 \times 0,15 \times 0,20}{1,8 \times 10^{-5}} = 2000$$

Este valor significa que o regime de escoamento é laminar. O comprimento de entrada da camada limite térmica, em regime laminar, é dado pela equação (2.17), que se traduz em

$$(L_{ent,t}/D)_{lam} \approx 0,05 Re_D Pr = 0,05 \times 2000 \times 0,724 = 72,4$$

o que significa que só ao fim de um comprimento equivalente a cerca de 72 diâmetros se atinge a camada limite térmica desenvolvida. Isso equivale a cerca de 14 metros, um comprimento muito superior aos 2 m do tubo. Para regime laminar com camada limite térmica desenvolvida, num escoamento no interior de um tubo circular com fluxo na superfície (\dot{q}_{sup}) constante, da Tabela 2.3 obtém-se:

$$Nu_{des} = 4,36$$

Como a zona de camada limite térmica desenvolvida nunca se atinge, vamos então usar uma adaptação da equação (2.21) para estimar o valor incrementado do Nu médio (admitindo um incremento idêntico ao verificado com temperatura constante na superfície do tubo):

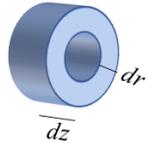
$$\overline{Nu}_D = 4,36 + \frac{0,0668 Re Pr D/L}{1+0,04(Re Pr D/L)^{2/3}} = 8,96$$

que conduz ao coeficiente de convecção médio

$$\bar{h} = \frac{\overline{Nu}_D k}{D} = \frac{8,96 \times 0,025}{0,2} = 1,1 \text{ W/m}^2\text{K}$$

um valor bastante baixo, fruto das propriedades do ar e da sua reduzida velocidade; na zona desenvolvida o coeficiente atingiria $0,55 \text{ W/m}^2\text{K}$.

A equação da energia para este escoamento em regime permanente e laminar, com dissipação viscosa desprezável, e usando as coordenadas r e z , é:

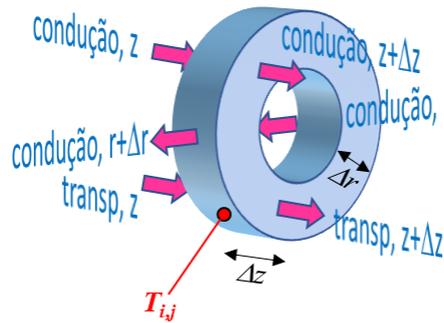


$$\rho c_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

e traduz que a variação da energia transportada pelo escoamento (à velocidade v_z) resulta do balanço das trocas de condução nas direções r e z ; esse balanço é feito para o elemento de volume infinitesimal representado acima. Esta equação não tem solução analítica sem simplificações adicionais, mesmo conhecendo já o campo de velocidades.

A utilização de um método numérico é então a única alternativa para resolver a equação e obter a distribuição de temperatura com r e z . Neste caso aplicou-se o método dos volumes finitos, utilizando uma malha com 41 elementos/nodos segundo o raio (r) e 81 elementos segundo o comprimento (z), perfazendo um total de 3321 temperaturas a calcular.

As 3321 equações necessárias ao modelo numérico expressam os balanços energéticos de elementos de volume cilíndricos, como o da figura seguinte, sendo que foram usados $\Delta r=2,5 \text{ mm}$ e $\Delta z=25 \text{ mm}$ (valores constantes).



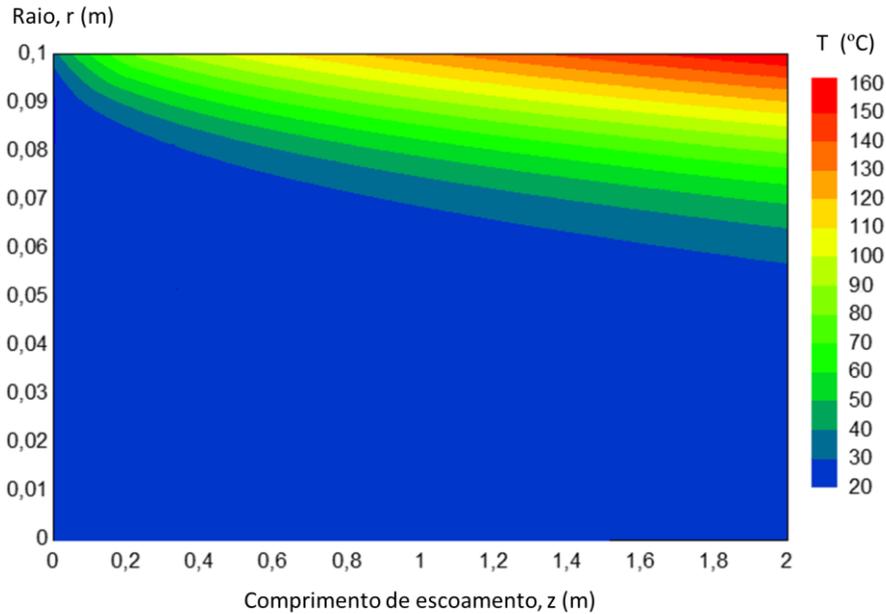
Cada elemento de volume é referenciado por 2 índices, i e j , sendo o primeiro relativo ao raio r (usados valores de i de 1 a 41) e o segundo relativo ao comprimento z (usados valores de j de 1 a 81). Para elementos interiores ($i=2$ a 40 e $j=2$ a 80) a equação para o elemento é:

$$\rho c_p v_z(r_i) 2\pi r_i \Delta r (T_{i,j} - T_{i,j-1}) = \frac{k}{\Delta r} 2\pi \left(r_i - \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta z (T_{i-1,j} - T_{i,j}) + \frac{k}{\Delta r} 2\pi \left(r_i + \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta z (T_{i+1,j} - T_{i,j}) + \frac{k 2\pi r_i \Delta r}{\Delta z} (T_{i,j-1} + T_{i,j+1} - 2T_{i,j})$$

sendo r_i o raio médio do elemento em causa, e usando a equação para o perfil de velocidades desenvolvido indicada atrás.

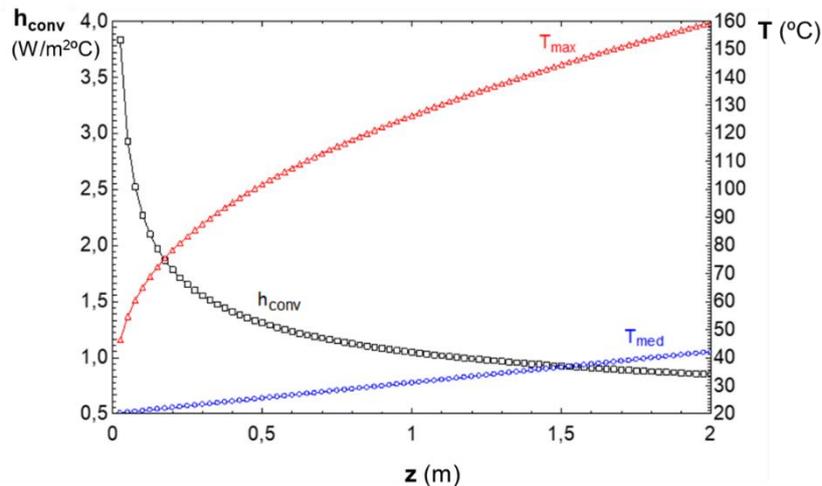
Os elementos na fronteira de entrada ($z=0$) têm temperatura igual a 20°C ($T_{i,1} = 20$). Os elementos de saída ($z=L$) são considerados sem transferir calor com elementos à direita (fora do domínio). Quanto aos elementos que correspondem a $i=1$, são pequenos cilindros cheios, com raio externo igual a $\Delta r/2$, e têm como condição (fronteira) uma condição de simetria radial de temperatura, que equivale a fluxo zero em $r=0$, sendo a velocidade igual à máxima. Para os elementos junto à parede ($i=41$), com raio entre $(r_{max} - \Delta r/2)$ e r_{max} , a condição imposta em $r = r_{max}$ é a de fluxo de calor na parede (igual a 100 W/m^2), para além de velocidade nula.

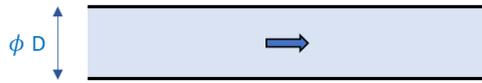
A figura seguinte apresenta os resultados obtidos para a distribuição de temperaturas, usando uma cor diferente para cada intervalo de 10°C. Como se pode observar, a temperatura em mais de metade da secção mantém-se próxima de 20°C até à saída, sendo a zona de gradiente mais acentuado (camada limite) de menor dimensão, que vai crescendo até à saída. A temperatura junto à parede aquecida atinge 160°C à saída. As altas temperaturas da parede, a par das baixas velocidades, provocarão efeitos de convecção natural, que aqui são desprezados.



O coeficiente de convecção pode ser obtido, para cada valor de z (ou j), dividindo o fluxo na parede pela diferença entre a temperatura desta e a temperatura média nessa secção, temperatura média (ou de mistura) que pode calcular-se a partir das temperaturas nesse j , para todos os valores de i , usando a equação (2.20) com o integral calculado numericamente. A partir dos valores locais pode então calcular-se a média para todo o comprimento de escoamento. Obteve-se um coeficiente de convecção médio de 1,2 W/m²K, muito próximo do obtido com o cálculo teórico aproximado. Prolongando o comprimento do tubo até aos 15 m também é possível obter um coeficiente na zona desenvolvida de 0,566 W/m²K, também muito próximo do estimado antes.

A figura seguinte representa a evolução do coeficiente de convecção ao longo do escoamento no tubo, bem como a evolução da temperatura média e da temperatura máxima.



P2.9

Para um escoamento turbulento num tubo circular, compare o coeficiente de convecção em zona desenvolvida para água e ar, representando ainda as respetivas evoluções em função da velocidade média.

Resolução e discussão

Vamos usar a correlação de Dittus-Boelter, válida para $Pr > 0,7$, $Re_D > 10000$:

$$Nu_D = 0,023 Re_D^{0,8} Pr^n$$

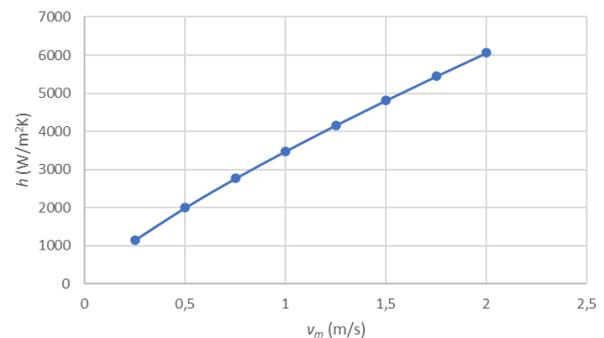
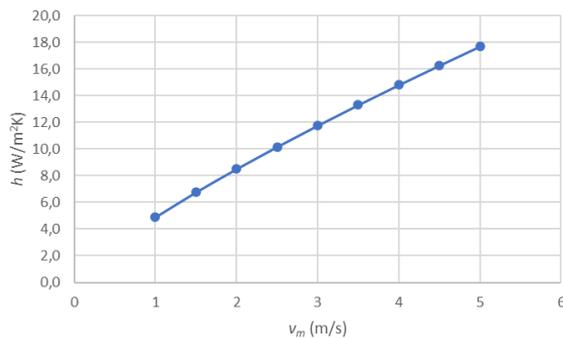
com $n=1/3$ (para aproximar as 2 situações de aquecimento e arrefecimento do fluido).

No caso do ar vamos considerar um tubo com um diâmetro de 25 cm e velocidades médias entre 0,25 e 5 m/s, que correspondem a Re_D entre 15700 e 79000.

No caso da água vamos considerar um tubo com um diâmetro de 2,5 cm e velocidades médias entre 0,25 e 2 m/s, que correspondem a Re_D entre 6250 e 50000.

Considerando propriedades físicas à temperatura ambiente, obtiveram-se os gráficos seguintes para o coeficiente de convecção, igual a

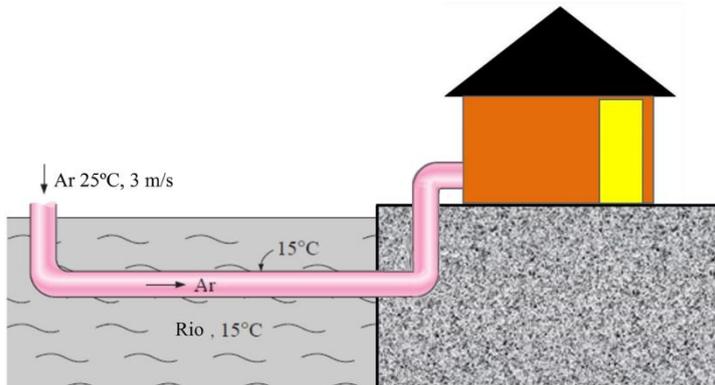
$$h = \frac{Nu_D k}{D}$$



Note-se a evolução semelhante com o aumento de velocidade, resultante do expoente 0,8 do número de Reynolds. Quanto aos valores de h , a água tem coeficientes de convecção turbulenta entre 1000 e 6000 W/m²K, enquanto os do ar estão entre 4 e 18 W/m²K. Os valores para a água são 250 a 350 vezes superiores aos do ar, para as velocidades e dimensões correntes consideradas, fundamentalmente devido às propriedades físicas em causa.

Comparem-se estes valores com os verificados em regime laminar desenvolvido, nas mesmas condições geométricas e com iguais propriedades: nesse caso os coeficientes não dependem da velocidade, e, considerando T_{sup} constante, o Nusselt desenvolvido é igual a 3,66. Para a água o coeficiente será de 88 W/m²K (velocidade até 0,1 m/s) e para o ar será de 0,4 W/m²K (velocidade até 0,15 m/s).

P2.10



Uma casa construída junto a um rio é arrefecida no Verão por uma corrente de ar ambiente (a 25°C) que é arrefecido ao circular numa conduta mergulhada no rio (a 15°C). A temperatura da conduta (com 20 cm de diâmetro e comprimento de 15 m) é idêntica à da água.

Calcule a temperatura a que o ar entra na casa (saída da conduta). Avalie o efeito da velocidade do ar na temperatura obtida por este sistema natural de arrefecimento.

(propriedades do ar a 20°C: $\rho=1,204 \text{ kg/m}^3$, $c_p=1007 \text{ J/kgK}$, $k=0,0251 \text{ W/mK}$, $\nu=1,516 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $Pr=0,731$)

Resolução e discussão

Consideremos então o escoamento interno do ar numa conduta circular, com um comprimento linear de 15 m (vamos desprezar as curvaturas do tubo). O ar vai perder calor para a superfície interior do tubo, que se encontra mais fria devido ao contacto com a água. É indicada a temperatura de 15°C para o tubo, igual à da água, o que se deve ao facto do coeficiente de convecção exterior para a água ser bastante superior ao interior do ar. Não sendo dadas especificações do material e espessura do tubo, na hipótese de ele ser metálico e de reduzida espessura, assumiremos desprezável a resistência de condução da parede.

Vamos calcular o Re para o escoamento interior, que é igual a

$$Re_D = \frac{v_m D}{\nu} = \frac{3 \times 0,20}{1,516 \times 10^{-5}} = 3,958 \times 10^4$$

o que significa que o escoamento se dá em regime turbulento. Neste regime, quando a camada limite se encontra desenvolvida, o número de Nusselt é calculável pela equação de Dittus-Boelter:

$$Nu_{D,desenv} = 0,023 Re_D^{0,8} Pr^{0,3} = 99,7$$

sendo neste caso o expoente do número de Prandtl igual a 0,3, uma vez que o ar está a arrefecer ao longo da conduta.

No regime turbulento o comprimento de entrada (até à zona de camada limite térmica desenvolvida) é de cerca de 10 diâmetros – equação (2.19) – o que neste caso significa 2 m de comprimento. Este valor é bastante inferior ao comprimento total, mas ainda assim podemos contabilizar o seu efeito usando a equação (2.23):

$$\overline{Nu}_D = Nu_{D,desenv} \left(1 + \frac{1}{(L/D)^{2/3}} \right) = 99,7 \times \left(1 + \frac{1}{(15/0,20)^{2/3}} \right) = 105,3$$

Então o coeficiente de convecção médio será:

$$\bar{h} = \frac{\overline{Nu}_D k}{D} = \frac{105,3 \times 0,0251}{0,20} = 13,2 \text{ W/m}^2\text{C}$$

Note-se que foram usadas propriedades do ar à temperatura média (aritmética) entre a temperatura de entrada do ar e a da superfície do tubo, ou seja, a 20°C. Depois de calcular a

temperatura de saída do ar poderão refazer-se os cálculos usando propriedades à temperatura média (aritmética) entre a média (aritmética) das temperaturas de entrada e saída, e a temperatura da superfície. No entanto, no caso do ar e das temperaturas em causa o impacto será reduzido.

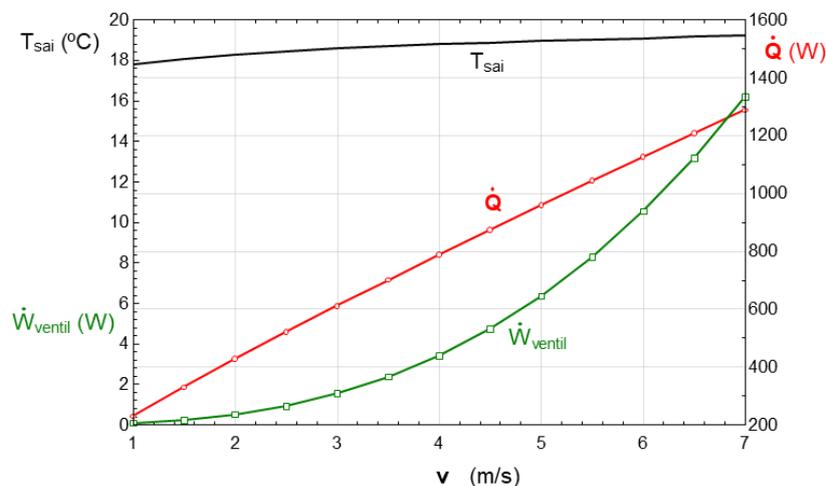
Pode calcular-se a temperatura (média) de saída do ar recorrendo à equação (2.26), válida para temperatura da superfície do tubo constante ao longo do tubo, e ainda admitindo o coeficiente de convecção médio constante. Resulta:

$$T_{sai} = T_{sup} + (T_{ent} - T_{sup}) \exp\left(-\frac{\bar{h} PL}{\dot{M} c_p}\right) =$$

$$= 15 + (25 - 15) \times \exp\left(-\frac{13,2 \times \pi \times 0,20 \times 15}{1,204 \times 3 \times \pi \times 0,20^2 / 4 \times 1007}\right) = 18,4^\circ\text{C}$$

O ar é assim introduzido no edifício a uma temperatura que pode assegurar o conforto térmico interior. Este tipo de sistemas de arrefecimento natural é bastante interessante, uma vez que usa recursos naturais e económicos. Uma variante bastante utilizada consiste em enterrar tubos no solo, que durante o Verão se mantém a uma temperatura bastante inferior à do ar exterior, permitindo arrefecer o ar naturalmente.

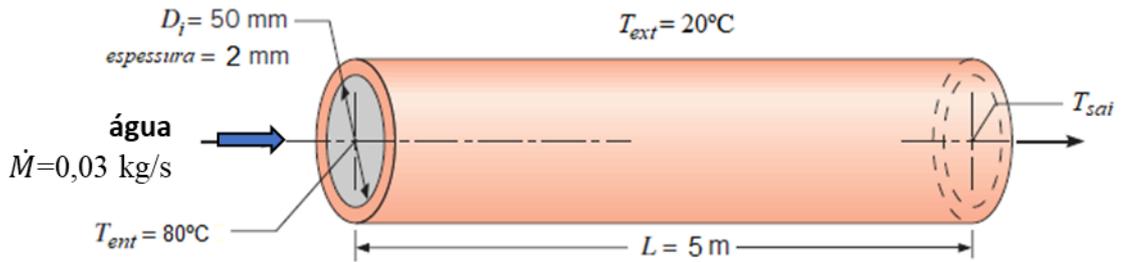
Analisemos agora o efeito da velocidade (caudal) de ar no arrefecimento conseguido. Repetindo os cálculos anteriores para velocidades entre 1 e 7 m/s, calculou-se a temperatura de saída, a potência trocada (arrefecimento) e a potência necessária à movimentação do ar (nesta só foi contabilizada a perda por atrito na conduta, e foi incluído o rendimento do ventilador). O gráfico seguinte apresenta os resultados.



Ao aumentar-se a velocidade, e caudal, o coeficiente de convecção aumenta (não proporcionalmente, devido ao expoente 0,8 do Re no Nu) o que faz aumentar a potência transferida do ar para o tubo. No entanto o ar arrefece ligeiramente menos ($T_{ent} - T_{sai}$ é menor), porque o caudal é maior; aumentando o caudal proporcionalmente à velocidade, como a potência não aumenta ao mesmo ritmo, o ΔT diminui.

A potência de ventilação necessária para garantir o escoamento do ar aumenta rapidamente com a velocidade, embora tenha um valor muito inferior ao da potência de arrefecimento. Assim, este sistema tem um comportamento energético bastante eficiente, comparando o consumo (ventilação) e o benefício (arrefecimento) energético.

P2.11



Numa instalação de água quente, esta sai de um coletor solar e entra no tubo da figura a 80°C. O tubo, com as dimensões da figura, é de aço inoxidável AISI 316 ($k = 13,4 \text{ W/mK}$). No exterior do tubo (a 20°C) o coeficiente global de transferência de calor é de $20 \text{ W/m}^2\text{°C}$.

Determine o coeficiente médio de convecção no interior do tubo, sabendo que à entrada o perfil de velocidades se encontra desenvolvido. Calcule a temperatura de saída da água e a temperatura média da superfície interior do tubo.

Propriedades a considerar para a água: $\rho=974 \text{ kg/m}^3$, $c_p=4195 \text{ J/kgK}$, $k=0,668 \text{ W/mK}$, $\mu=365 \times 10^{-6} \text{ Ns/m}^2$, $Pr=2,29$.

Resolução e discussão

Este é também um escoamento interno de água numa conduta circular, com um comprimento de 5 m. A água vai perder calor para a superfície interior do tubo, que se encontra mais fria devido ao contacto da superfície exterior com o ar exterior. Vamos considerar a parede do tubo, quer a superfície interior, quer a exterior, a temperatura constante ao longo do escoamento, e igual ao seu valor médio. Trata-se de uma aproximação à realidade, pois as temperaturas variam também na direção do escoamento; essa aproximação permite também considerar que há apenas condução radial no tubo.

A velocidade e o número de Reynolds para o escoamento interior são

$$v_m = \frac{\dot{M}}{\rho \pi D_{int}^2 / 4} = \frac{0,03}{974 \times \pi \times 0,050^2 / 4} = 0,0157 \text{ m/s}$$

$$Re_D = \frac{\rho v_m D_{int}}{\mu} = \frac{974 \times 0,0157 \times 0,050}{365 \times 10^{-6}} = 2072$$

o que significa que o escoamento se dá em regime laminar, devido ao reduzido caudal. Neste regime, quando a camada limite se encontra desenvolvida, o número de Nusselt é independente da velocidade e igual a 3,66, na hipótese de temperatura constante na superfície.

A camada limite térmica só estará desenvolvida ao fim de um comprimento (de entrada) dado pela equação (2.17):

$$L_{ent,t} \approx 0,05 Re_D Pr D_{int} = 0,05 \times 2072 \times 2,29 \times 0,050 = 11,9 \text{ m}$$

comprimento que não é atingido pelo escoamento, pelo que todo o tubo (5 m) se encontra na zona de entrada; vamos então usar a equação (2.21) para calcular o Nu médio:

$$\overline{Nu}_D = 3,66 + \frac{0,0668 Re_D Pr D_{int}/L}{1 + 0,04 (Re_D Pr D_{int}/L)^{2/3}} = 3,66 + \frac{0,0668 \times 2072 \times 2,29 \times 0,05/5}{1 + 0,04 \times (2072 \times 2,29 \times 0,05/5)^{2/3}} = 5,74$$

que conduz ao coeficiente de convecção médio:

$$\bar{h}_{int} = \frac{\bar{Nu}_D k}{D_{int}} = \frac{5,74 \times 0,668}{0,050} = 76,7 \text{ W/m}^2\text{K}$$

A temperatura (média) de saída da água pode relacionar-se com a temperatura de entrada e a temperatura média da superfície interior do tubo – equação (2.26):

$$\frac{T_{sai} - \bar{T}_{sup,int}}{T_{ent} - \bar{T}_{sup,int}} = \exp\left(-\frac{\bar{h}_{int} \pi D_{int} L}{\dot{M} c_p}\right)$$

Não sendo conhecidas T_{sai} e $\bar{T}_{sup,int}$, outra equação é necessária. Ela resulta da igualdade entre a potência calorífica perdida para o exterior através do tubo e a potência perdida pelo escoamento de água:

$$\frac{\bar{T}_{sup,int} - T_{ext}}{\frac{\ln(D_{ext}/D_{int})}{2\pi k_t L} + \frac{1}{h_{ext} \pi D_{ext} L}} = \dot{M} c_p (T_{ent} - T_{sai})$$

A resolução simultânea destas 2 equações permite calcular T_{sai} e $\bar{T}_{sup,int}$:

$$\begin{cases} \frac{T_{sai} - \bar{T}_{sup,int}}{80 - \bar{T}_{sup,int}} = \exp\left(-\frac{76,7 \times \pi \times 0,05 \times 5}{0,03 \times 4195}\right) \\ \frac{\bar{T}_{sup,int} - 20}{\frac{\ln(54/50)}{2 \times \pi \times 13,4 \times 5} + \frac{1}{20 \times \pi \times 0,054 \times 5}} = 0,03 \times 4195 \times (80 - T_{sai}) \end{cases}$$

equações que se podem escrever como:

$$\begin{cases} T_{sai} - \bar{T}_{sup,int} = (80 - \bar{T}_{sup,int}) \times 0,6196 \\ \bar{T}_{sup,int} - 20 = (1,83 \times 10^{-4} + 0,0589) \times 125,85 \times (80 - T_{sai}) \end{cases}$$

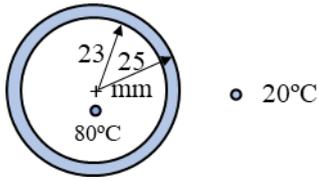
resultando em:

$$\begin{cases} T_{sai} = 74,0^\circ\text{C} \\ \bar{T}_{sup,int} = 64,3^\circ\text{C} \end{cases}$$

Note-se a pequena resistência de condução do tubo, comparada com a resistência de convecção exterior (320 vezes menor): a temperatura da superfície exterior do tubo é de $64,2^\circ\text{C}$. A água arrefece 6°C entre a entrada e a saída, o que corresponde a uma potência perdida de 755 W.

Neste caso a temperatura da superfície interior do tubo não é muito próxima da temperatura da água, devido ao relativamente baixo coeficiente de convecção da água (regime laminar). No caso de um maior caudal, existindo regime turbulento, a temperatura do tubo aproximar-se-ia muito mais da temperatura da água, como no problema P1.7.

P2.12

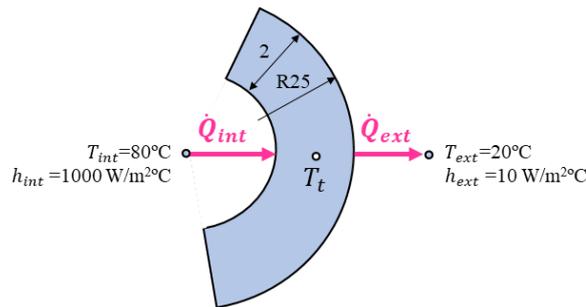


Retomemos o problema P1.19, em que um tubo de aço inox ($\rho=8055 \text{ kg/m}^3$, $c_p=480 \text{ J/kgK}$, $k=15 \text{ W/m}^\circ\text{C}$), inicialmente à temperatura do ar exterior de 20°C , passou a ser aquecido ao circular água no seu interior à temperatura de 80°C . O coeficiente de convecção interior (água) é igual a $1000 \text{ W/m}^2\text{C}$, e o exterior é de $10 \text{ W/m}^2\text{C}$.

Calculou-se a evolução da temperatura do tubo até atingir o regime permanente. Vamos agora contabilizar ainda a variação de temperatura da água, que entra a 80°C , saindo ao fim de 10 m.

Resolução e discussão

Como visto na altura, o tubo pode ser tratado como um sistema global, sendo a sua temperatura uniforme em cada instante. Ao iniciar-se a circulação de água o tubo passa a receber calor desta, e a perder calor para o exterior (pois a sua temperatura vai subir). Vamos agora considerar que a água arrefece até à saída do tubo, arrefecimento esse que depende da temperatura do tubo: a água começa por perder mais calor, reduzindo-se a perda à medida que o tubo aquece. A potência \dot{Q}_{int} da figura deve igualar a variação de energia por unidade de tempo entre a entrada e a saída da água, não considerando inércia térmica na água, ou seja, admitindo que a transferência de calor no fluido se dá em regime permanente em cada instante.



Desse modo, podemos fazer um balanço global do tubo, combinado com a equação para a evolução de temperatura do tubo, que em cada instante está à temperatura média \bar{T}_t :

$$\rho_t V_t c_{p,t} \frac{d\bar{T}_t}{dt} = \dot{Q}_{int} - \dot{Q}_{ext} = \dot{M} c_{p,\text{ág}} (T_{ent} - T_{sai}) - h_{ext} A_{ext} (\bar{T}_t - T_{ext})$$

$$\frac{T_{sai} - \bar{T}_t}{T_{ent} - \bar{T}_t} = \exp\left(-\frac{h_{int} \pi D_{int} L}{\dot{M} c_{p,\text{ág}}}\right)$$

sistema de equações que permite calcular \bar{T}_t e T_{sai} ao longo do tempo, conhecido o caudal. Este pode ser obtido a partir do conhecimento de h_{int} . Sendo a 1ª equação uma equação diferencial é necessária a sua integração.

Para obter o caudal, vamos partir do valor de $h_{int} = 1000 \text{ W/m}^2\text{K}$, que sugere a existência de regime turbulento (a verificar posteriormente). Vamos usar como propriedades para a água (a 80°C): $\rho=974 \text{ kg/m}^3$, $c_p=4195 \text{ J/kgK}$, $k=0,668 \text{ W/mK}$, $\mu=365 \times 10^{-6} \text{ Ns/m}^2$, $Pr=2,29$. O Nu em regime turbulento desenvolvido relaciona-se com o número de Reynolds (equação de Dittus-Boelter):

$$\frac{h_{int} D_{int}}{k} = \frac{1000 \times 0,046}{0,668} = 0,023 Re_D^{0,8} Pr^{0,3} \Rightarrow Re_D = 16232$$

Este valor de Re_D aponta para um escoamento turbulento. O comprimento de entrada térmico (igual a cerca de 10 vezes o diâmetro), é igual a 0,46 m, e portanto desprezável face aos 10 m do tubo. Pode então tomar-se o Nu da equação acima como o valor que corresponde ao h_{int} médio. Com o Re_D calculado podemos então obter a velocidade média e o caudal:

$$v_m = \frac{Re_D \mu}{\rho D_{int}} = \frac{16232 \times 365 \times 10^{-6}}{974 \times 0,046} = 0,132 \text{ m/s}$$

$$\dot{M} = \rho v_m \frac{\pi D_{int}^2}{4} = 974 \times 0,132 \times \frac{\pi \times 0,046^2}{4} = 0,214 \text{ kg/s}$$

Temos então todos os valores definidos para cálculo do sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{T}_t}{dt} = \frac{0,214 \times 4195 \times (80 - T_{sai}) - 10 \times \pi \times 0,050 \times 10 (\bar{T}_t - 20)}{8055 \times \pi \times (0,025^2 - 0,023^2) \times 10 \times 480} \\ \frac{T_{sai} - \bar{T}_t}{80 - \bar{T}_t} = \exp\left(-\frac{1000 \times \pi \times 0,046 \times 10}{0,214 \times 4195}\right) = 0,200 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\bar{T}_t}{dt} = 320,32 - 15,708 \bar{T}_t - 0,07699 T_{sai} \\ T_{sai} = 0,8 \bar{T}_t + 16 \end{cases}$$

que, por substituição da 2ª equação na 1ª, permite obter uma única equação a integrar para obter a temperatura do tubo ao longo do tempo:

$$\frac{d\bar{T}_t}{dt} = 4,954 - 0,06294 \bar{T}_t$$

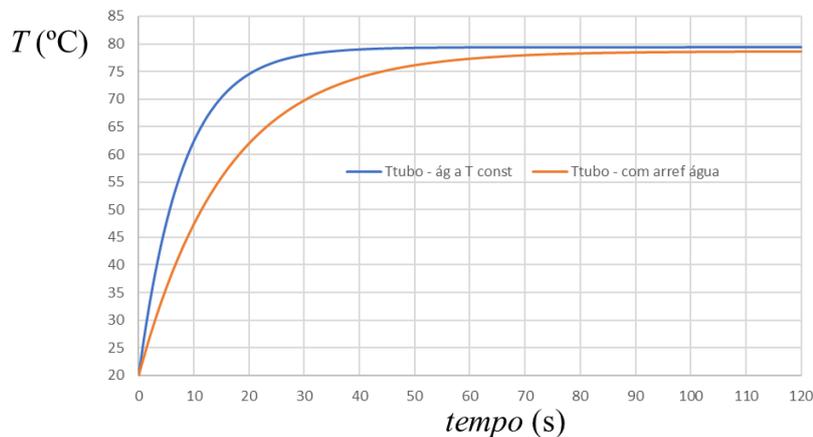
Separando as variáveis e aplicando a condição inicial ($\bar{T}_t(t=0) = 20$) obtém-se

$$\frac{4,954 - 0,06294 \bar{T}_t}{4,954 - 0,06294 \times 20} = \exp(-0,06294 t)$$

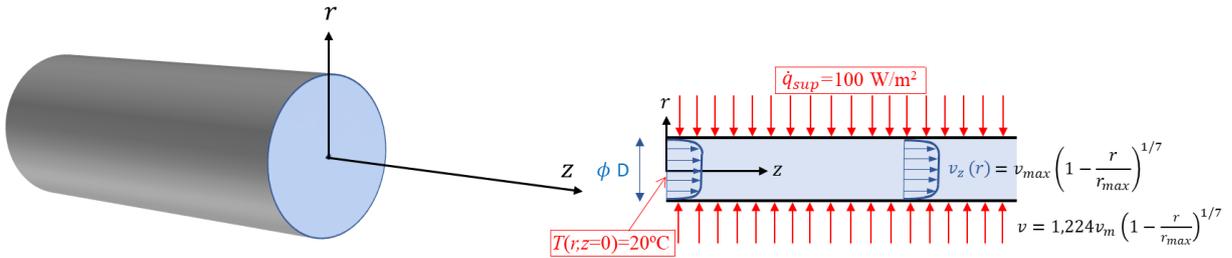
ou

$$\bar{T}_t = 78,71 - 58,71 \exp(-0,06294 t)$$

O gráfico seguinte representa a evolução da temperatura do tubo ao longo do tempo, comparada com a obtida anteriormente (P1.19). Note-se que a subida de temperatura é mais lenta, pois o tubo recebe menos calor que quando a água não arrefece (se mantém a 80°C até à saída). Em consequência, também demora mais tempo a atingir o regime permanente. A temperatura de equilíbrio do tubo é de 78,7°C, enquanto antes era de 79,4°C.



P2.13



Considere um escoamento de ar no interior de um tubo de 20 cm de diâmetro, e 2 m de comprimento, semelhante ao do problema P2.8, mas agora com uma velocidade média de 5 m/s. À entrada o perfil de velocidades já se encontra desenvolvido, mas é agora turbulento, podendo usar-se as equações indicadas na figura.

A temperatura do ar à entrada é uniforme e igual a 20°C, e o tubo aquece o fluido com um fluxo constante de 100 W/m². Calcule o coeficiente de convecção interior médio. Tomando o perfil de velocidades desenvolvido fornecido, avalie a distribuição de temperaturas no fluido e o coeficiente de convecção se se usar um método numérico semelhante ao de P2.8.

Propriedades a considerar para o ar: $\rho=1,2 \text{ kg/m}^3$, $c_p=1005 \text{ J/kgK}$, $k=0,025 \text{ W/mK}$, $\mu=1,8 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$, $Pr=0,710$.

Resolução e discussão

Este é um escoamento interno, num tubo de secção circular, semelhante ao do problema P2.8, com a diferença de o regime de escoamento ser turbulento. Vamos calcular o número de Reynolds. Usando a definição, tem-se:

$$Re_D = \frac{\rho v_m D}{\mu} = \frac{1,2 \times 5 \times 0,20}{1,8 \times 10^{-5}} = 66667$$

Este valor comprova que o regime de escoamento é turbulento. O comprimento de entrada da camada limite térmica, em regime turbulento, é dado pela equação (2.19), que se traduz em

$$(L_{ent,t}/D)_{turbul} \approx 10 \quad \Rightarrow \quad L_{ent,t} = 10 \times 0,20 = 2 \text{ m}$$

o que significa que o comprimento de entrada é exatamente igual ao comprimento de escoamento, estando todo o tubo em zona de entrada térmica.

O Nu em regime turbulento desenvolvido relaciona-se com o número de Reynolds (equação de Dittus-Boelter para fluido aquecido):

$$Nu_{D,desenv} = 0,023 Re_D^{0,8} Pr^{0,4} = 145,0$$

que conduz ao coeficiente de convecção na zona desenvolvida de

$$h_{desenv} = \frac{Nu_{desenv} k}{D} = \frac{145,0 \times 0,025}{0,2} = 18,1 \text{ W/m}^2\text{K}$$

No entanto, contabilizando a zona de entrada (que é todo o comprimento) pela equação (2.23), temos:

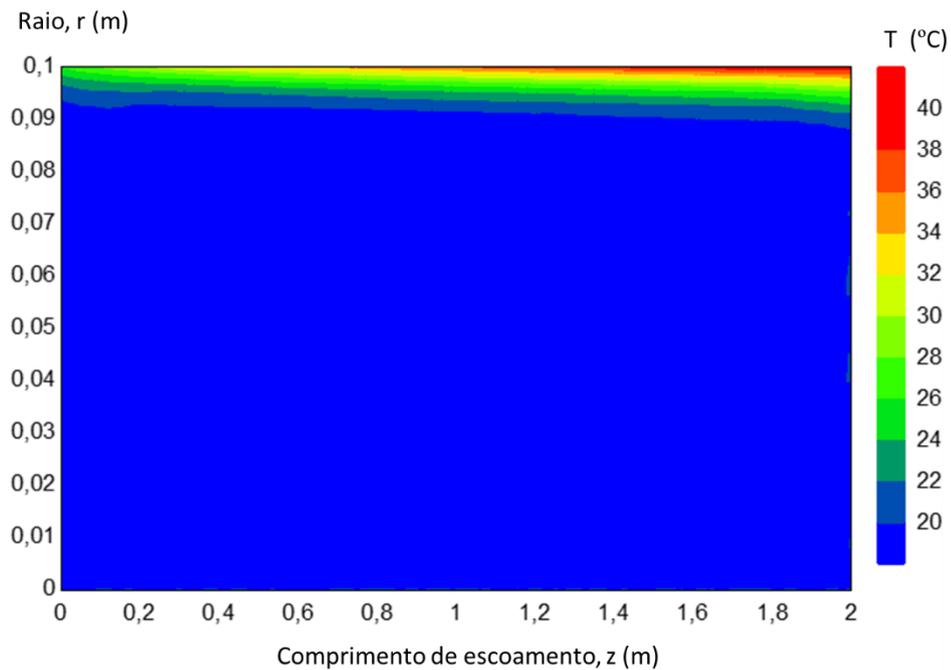
$$\overline{Nu}_D = Nu_{D,desenv} \left(1 + \frac{1}{(L/D)^{2/3}}\right) = 145,0 \times \left(1 + \frac{1}{(2/0,20)^{2/3}}\right) = 176,2$$

Então o coeficiente de convecção médio será:

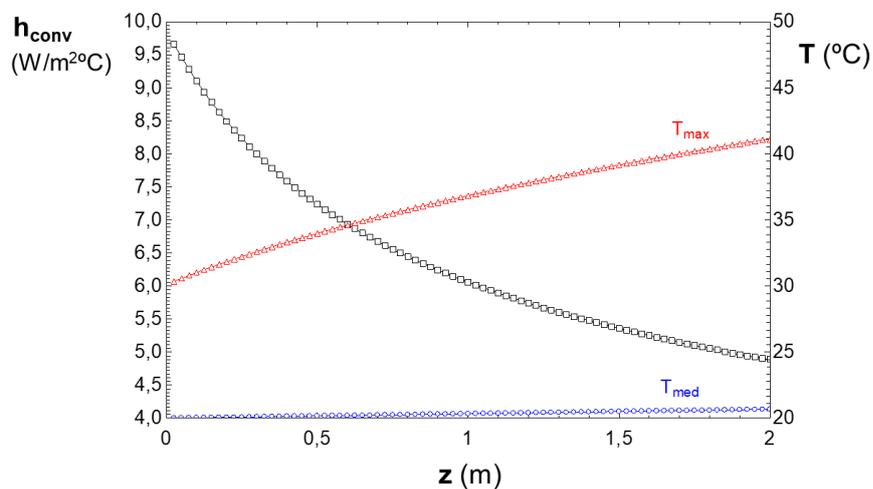
$$\bar{h} = \frac{\overline{Nu}_D k}{D} = \frac{176,2 \times 0,025}{0,20} = 22,0 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Aplicou-se em seguida um modelo numérico idêntico ao do problema P2.8, usando o método dos volumes finitos, e com uma malha com 41 elementos/nodos segundo o raio (r) e 81 elementos segundo o comprimento (z), perfazendo um total de 3321 temperaturas a calcular. Note-se que esse modelo despreza a turbulência na equação da energia (difusibilidade turbulenta).

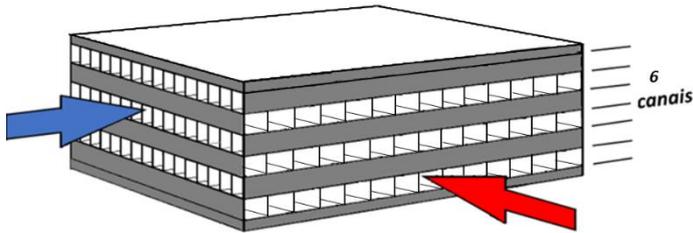
A figura seguinte apresenta os resultados obtidos para a distribuição de temperaturas, usando uma cor diferente para cada intervalo de 2°C . Como se pode observar, a temperatura em grande parte da secção mantém-se próxima de 20°C até à saída, sendo a zona de gradiente mais acentuado a que corresponde à sub-camada laminar do escoamento. A temperatura junto à parede aquecida atinge 41°C à saída.



A partir dos valores locais do coeficiente de convecção, representados na figura seguinte, foi calculado o valor médio para todo o comprimento de escoamento, obtendo-se um coeficiente médio de $6,4 \text{ W/m}^2\text{C}$, bastante inferior ao calculado com a correlação de Dittus-Boelter. A turbulência (e a difusibilidade turbulenta) têm assim um papel importante, o que exige a aplicação de um modelo numérico de turbulência.



P2.14



Propriedade	Gás quente	Ar frio
p (atm)	4	0,5
ρ (kg/m ³)	2,163	0,582
c_p (J/kgK)	1072	1055
k (W/mK)	0,0341	0,0280
μ (Pa.s)	$2,75 \times 10^{-5}$	$2,38 \times 10^{-5}$

A figura acima representa um permutador de calor de placas alhetadas (alhetas retangulares), usado no sistema de ar condicionado de um avião. O permutador aquece ar mais frio que entra a 56°C, com um caudal de 0,54 kg/s, através de uma corrente de gases de combustão quentes, que entram a 355°C, com um caudal de 0,57 kg/s.

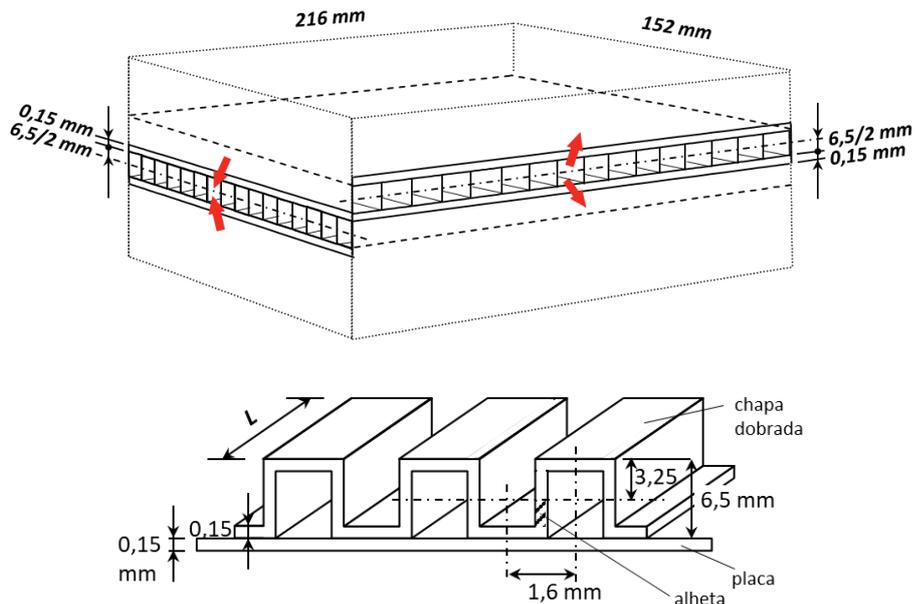
O permutador é constituído por 20 canais de 152 mm de comprimento para o fluido quente, e 20 canais de 216 mm de comprimento para o fluido frio (a figura representa um total de apenas 6 canais, sendo 3 para cada corrente).

As placas, em aço inox, têm uma condutibilidade térmica de 15 W/mK, uma espessura de 0,15 mm e estão espaçadas de 6,5 mm. As alhetas, do mesmo material, têm uma espessura de 0,15 mm e estão espaçadas de 1,6 mm (entre eixos).

Pretende-se calcular o coeficiente global de transferência de calor no permutador, entre as duas correntes.

Resolução e discussão

Este tipo de permutador é composto por várias placas sobrepostas, espaçadas de 6,5 mm neste caso, formando canais onde alternadamente e em direções cruzadas circulam os 2 fluidos. No interior do espaço entre placas são colocadas alhetas retangulares, pela inserção de chapas dobradas com secção retangular. As figuras seguintes ilustram 2 canais genéricos (1 de fluido quente e 1 de fluido frio) e o espaço entre placas, com as respetivas dimensões.



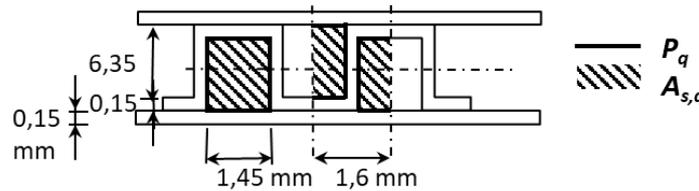
Admite-se uma ligação (contacto) perfeita entre as porções horizontais da chapa/alhetas e as placas, passando estas a fazer parte da base da alheta (consideradas à temperatura da placa). As porções verticais são as alhetas propriamente ditas, com dimensões características a ver mais à frente. Supõe-se que o calor passa por condução na direção vertical, havendo convecção nos 2 lados da alheta. Considerando uma distribuição uniforme do caudal por cada um dos 20 canais, e em toda a sua largura para cada fluido, pode calcular-se o Re e o Nu . A geometria é a de um escoamento interno num canal retangular, sendo a velocidade diferente em cada fluido. Para o fluido quente (gases) temos um comprimento útil de escoamento de 152 mm e uma largura útil de 216 mm, largura na qual cabem 135 alhetas (espaçadas de 1,6 mm). O espaço/secção disponível para passagem do fluido obtém-se descontando ao espaço entre placas o espaço ocupado pela chapa/alhetas:

$$A_{s,canal\ q} = 0,0065 \times 0,216 - 135 \times (0,0016 \times 0,00015 + 0,0062 \times 0,00015) = \\ = 0,00124605 \text{ m}^2$$

A velocidade média de circulação num canal de fluido quente pode calcular-se através de

$$v_{m,q} = \frac{\dot{m}_q/n_{canais\ q}}{\rho_q A_{s,canal\ q}} = \frac{0,57/20}{2,163 \times 0,00124605} = 10,57 \text{ m/s}$$

O número de Reynolds pode avaliar-se com esta velocidade e o diâmetro hidráulico. Este pode ser calculado para cada espaço entre alhetas (ver figura seguinte).



$$D_{h,q} = \frac{4A_{s,q}}{P_q} = \frac{4 \times (0,0016 - 0,00015) \times (0,0065 - 0,00015)}{2 \times (0,0016 - 0,00015) + 2 \times (0,0065 - 0,00015)} = 0,00236 \text{ m}$$

diâmetro hidráulico que será igual para o fluido frio, devido à igual geometria das alhetas.

O número de Reynolds para o fluido quente será:

$$Re_q = \frac{\rho_q v_{m,q} D_{h,q}}{\mu_q} = \frac{2,163 \times 10,57 \times 0,00236}{2,75 \times 10^{-5}} = 1962$$

pelo que o escoamento será feito em regime laminar. Neste regime, com camada limite dinâmica e térmica desenvolvidas, o Nu é constante, e igual a 4,44 (da Tabela 2.3, com $a/b \approx 4$, para T_{sup} constante). O comprimento de entrada pode estimar-se a partir da equação (2.17), vindo

$$L_{ent,t,q} \approx 0,05 Re_q Pr_q D_{h,q} = 0,05 \times 1962 \times \frac{2,75 \times 10^{-5} \times 1072}{0,0341} \times 0,00236 = 0,2001 \text{ m}$$

o que significa que, sendo o comprimento útil de escoamento de 152 mm, o fluido quente não chega a atingir a camada limite desenvolvida. Vamos então usar uma adaptação da equação (2.21) para estimar o valor incrementado do Nu médio (admitindo um incremento idêntico ao verificado num tubo circular):

$$\overline{Nu}_q = 4,44 + \frac{0,0668 Re_q Pr_q D_{h,q}/L_q}{1+0,04(Re_q Pr_q D_{h,q}/L_q)^{2/3}} = 5,74$$

a partir do qual se pode calcular o valor médio do coeficiente de convecção:

$$\bar{h}_q = \frac{\overline{Nu}_q k_q}{D_{h,q}} = 83 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Podem fazer-se cálculos análogos para chegar ao coeficiente de convecção médio para o fluido frio (ar), que tem um comprimento de escoamento de 216 mm e uma largura útil de 152 mm, com 95 alhetas de iguais dimensões e espaçamento, obtendo-se então:

$$A_{s,canal f} = 0,0065 \times 0,152 - 95 \times (0,0016 \times 0,00015 + 0,0062 \times 0,00015) = 0,00087685 \text{ m}^2$$

$$v_{m,f} = \frac{\dot{m}_f/n_{canaís f}}{\rho_f A_{s,canal f}} = \frac{0,54/20}{0,582 \times 0,00087685} = 52,9 \text{ m/s}$$

$$D_{h,f} = D_{h,q} = 0,00236 \text{ m}$$

$$Re_f = \frac{\rho_f v_{m,f} D_{h,f}}{\mu_f} = \frac{0,582 \times 52,9 \times 0,00236}{2,38 \times 10^{-5}} = 3053$$

No caso do fluido frio o regime de escoamento é já de transição para o turbulento. Não sendo o regime nitidamente turbulento, e sendo a equação de Dittus-Boelter (2.22) válida apenas para $Re_D > 10000$, vamos considerar como hipótese conservadora que o escoamento é ainda laminar. Nesse caso:

$$Nu_{des,f} = 4,44$$

$$\overline{Nu}_f = 4,44 + \frac{0,0668 Re_f Pr_f D_{h,f}/L_f}{1+0,04(Re_f Pr_f D_{h,f}/L_f)^{2/3}} = 5,88$$

$$\bar{h}_f = \frac{\overline{Nu}_f k_f}{D_{h,f}} = 70 \text{ W/m}^2\text{K}$$

O coeficiente global de transferência de calor tem de considerar as resistências de convecção e condução nas placas, sendo que na convecção existe uma área de contacto da base das placas (área entre alhetas) e uma área de convecção das alhetas, sujeita ao rendimento destas. Usando a definição vista em 1.1.4 podemos escrever para a resistência da transferência placas/alhetas – fluido:

$$R_{sup} = \frac{1}{\eta_{sup} \bar{h} A_{tot}} = \frac{1}{(\eta_{alh} A_{alh} + A_{entre alh}) \bar{h}}$$

sendo o rendimento superficial em cada fluido

$$\eta_{sup} = \eta_{alh} \frac{n_{alh} A_{1alh}}{A_{tot}} + \frac{n_{alh} A_{entre alh}}{A_{tot}}$$

A resistência global, relacionável com o coeficiente global (U_{ref}), será então

$$R_{global} = \frac{1}{U_{ref} A_{ref}} = \frac{1}{\eta_{sup,q} \bar{h}_q A_{tot,q}} + \frac{e_{placas}}{k_{placas} A_{placas}} + \frac{1}{\eta_{sup,f} \bar{h}_f A_{tot,f}}$$

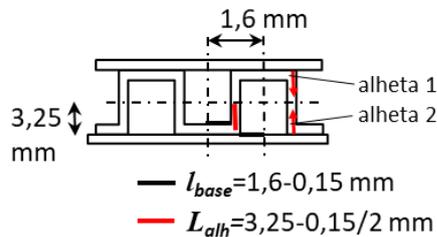
Como o coeficiente global se expressa por unidade de área e as áreas variam – existe a área de condução, igual à da secção das placas, a área de contacto com o fluido quente e a área de contacto com o fluido frio – definiu-se uma área de referência (A_{ref}) que se considera igual à área das placas (seria a área de transferência se não existissem alhetas). Ficará então

$$\frac{1}{U_{ref}} = \frac{A_{placas}}{\eta_{sup,q} \bar{h}_q A_{tot,q}} + \frac{e_{placas}}{k_{placas}} + \frac{A_{placas}}{\eta_{sup,f} \bar{h}_f A_{tot,f}}$$

Vamos então calcular as áreas, os rendimentos, e depois obter o coeficiente global. A área das placas será, em cada canal, a área das 2 placas em contacto com o fluido e alhetas (uma acima e outra abaixo), sendo a total a que corresponde ao número de canais para cada fluido (20); no entanto, uma face de cada uma das placas nos canais extremos não transfere calor (não há fluido do outro lado), pelo que devem ser descontadas 2 faces (1 placa). Então:

$$A_{placas} = A_{1\text{ placa}}(2n_{\text{canais},1\text{flui}} - 1) = 0,216 \times 0,152 \times (2 \times 20 - 1) = 1,280 \text{ m}^2$$

Quanto às áreas de convecção teremos em cada canal, para fluido quente ou frio, a área de convecção das alhetas e a área da base (entre alhetas), tendo também em conta que nos canais extremos não há transferência de calor. A figura seguinte ilustra as dimensões a considerar para cada alheta (iguais nos 2 fluidos). A configuração equivale a 2 alhetas, uma ligada à placa de cima e uma ligada à placa de baixo, sem transferência no topo, devido à simetria; para o comprimento de cada alheta (L_{alh}) é considerada uma média dos 2 lados, devido à diferença provocada pela espessura da chapa.



Então, considerando o perímetro de convecção de cada alheta (igual a 2 vezes o comprimento de escoamento, por haver convecção dos 2 lados), têm-se:

$$A_{tot,q \text{ ou } f} = (2n_{\text{canais},q \text{ ou } f} - 1)(n_{\text{alh},q \text{ ou } f} A_{1\text{alh}} + n_{\text{alh}} A_{\text{entre alh},q \text{ ou } f})$$

$$\begin{aligned} A_{tot,q} &= (2 \times 20 - 1) \times (135 \times 2L_q L_{alh} + 135 \times l_{base} L_q) \\ &= 39 \times (135 \times 2 \times 0,152 \times 0,003175 + 135 \times 0,00145 \times 0,152) \\ &= 6,242 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{tot,f} &= (2 \times 20 - 1) \times (95 \times 2L_f L_{alh} + 95 \times l_{base} L_f) \\ &= 39 \times (95 \times 2 \times 0,216 \times 0,003175 + 95 \times 0,00145 \times 0,216) = \\ &= 6,242 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Para calcular o rendimento das alhetas vamos recorrer à figura anterior, e considerar que a base da chapa dobrada está à mesma temperatura da placa (temperatura da base da alheta), usando

um comprimento médio (média dos 2 lados representada na figura). Os rendimentos, usando a equação (1.35) para uma alheta retangular isolada no topo, serão

$$m_q = \sqrt{\frac{\bar{h}_q P_{alh}}{k_{placas} A_{s,1alh}}} = \sqrt{\frac{83 \times 0,152 \times 2}{15 \times 0,00015 \times 0,152}} = 271,6 \text{ m}^{-1}$$

$$\eta_{alh,q} = \frac{\tanh(m_q L_{alh})}{m_q L_{alh}} = \frac{\tanh(271,6 \times 0,003175)}{271,6 \times 0,003175} = 0,809$$

$$\eta_{sup,q} = \eta_{alh,q} \frac{n_{alh,q} A_{1alh}}{A_{tot,q}} + \frac{n_{alh,q} A_{entre\ alh}}{A_{tot,q}} = 0,809 \frac{39 \times 135 \times 2 \times 0,152 \times 0,003175}{6,242} + \frac{39 \times 135 \times 0,00145 \times 0,152}{6,242} = 0,845$$

$$m_f = \sqrt{\frac{\bar{h}_f P_{alh}}{k_{placas} A_{s,1alh}}} = \sqrt{\frac{70 \times 0,216 \times 2}{15 \times 0,00015 \times 0,216}} = 249,4 \text{ m}^{-1}$$

$$\eta_{alh,f} = \frac{\tanh(m_f L_{alh})}{m_f L_{alh}} = \frac{\tanh(249,4 \times 0,003175)}{249,4 \times 0,003175} = 0,833$$

$$\eta_{sup,f} = \eta_{alh,f} \frac{n_{alh,f} A_{1alh}}{A_{tot,q}} + \frac{n_{alh,f} A_{entre\ alh}}{A_{tot,f}} = 0,833 \frac{39 \times 95 \times 2 \times 0,216 \times 0,003175}{6,242} + \frac{39 \times 95 \times 0,00145 \times 0,216}{6,242} = 0,864$$

O rendimento das superfícies, apesar de superior ao das alhetas, poderia ser aumentado usando um material com maior condutibilidade, como o alumínio. Com uma condutibilidade das alhetas igual a 180 W/mK conseguir-se-iam $\eta_{alh,q} = 0,980$ e $\eta_{alh,f} = 0,983$, e ainda $\eta_{sup,q} = 0,984$ e $\eta_{sup,f} = 0,986$, valores já bastante próximos de 1.

Podemos finalmente calcular o coeficiente global de transferência:

$$\begin{aligned} \frac{1}{U_{ref}} &= \frac{A_{placas}}{\eta_{sup,q} \bar{h}_q A_{tot,q}} + \frac{e_{placas}}{k_{placas}} + \frac{A_{placas}}{\eta_{sup,f} \bar{h}_f A_{tot,f}} = \\ &= \frac{1,280}{0,845 \times 83 \times 6,242} + \frac{0,00015}{15} + \frac{1,280}{0,864 \times 70 \times 6,242} = 0,00632 \end{aligned}$$

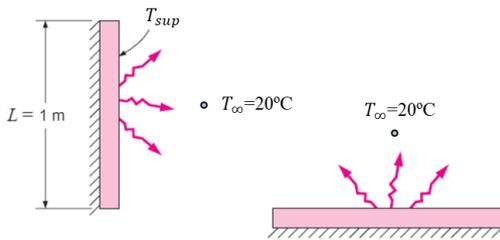
$$U_{ref} = 158 \text{ W/m}^2\text{K}$$

O valor deste coeficiente, a par da área global de transferência, permitirá calcular as temperaturas de saída das 2 correntes, e a potência calorífica transferida no permutador, através do cálculo da eficiência do permutador. O produto UA é o parâmetro mais relevante para a avaliação da eficiência. Neste caso tem-se $UA = U_{ref} A_{ref} = 202 \text{ W/K}$, o que, através de cálculos aqui não tratados, conduzirá a uma eficiência do permutador de 25% e a uma potência transferida de 43,3 kW.

Esta eficiência, bem como a potência, poderão ser aumentadas com um aumento do número de placas, mesmo sem aumentar os caudais. Admitindo que se duplica o número de canais para 40 em cada fluido (81 placas, com 2 extremas, ou seja 79 que transferem calor), as áreas de transferência de calor praticamente duplicarão (aumentam 79/39 vezes). Mantendo os caudais, as velocidades médias dos fluidos reduzir-se-ão para metade (pois os caudais dividem-se pelo dobro dos canais). No entanto, como os escoamentos se dão em regime laminar, os coeficientes

de convecção na zona desenvolvida não são afetados pela redução da velocidade (são constantes). Há uma pequena variação devida ao peso da zona de entrada; por exemplo, para o fluido frio o coeficiente de convecção passa de 70 para 62 W/m²K. Assim, o aumento da potência será bastante significativo, e pode mesmo duplicar com um pequeno aumento dos caudais.

P2.15



Uma placa quadrada, com 1 m x 1 m, pode ser mantida a uma temperatura constante graças a um sistema de aquecimento de potência variável. A placa está rodeada de ar calmo, à temperatura de 20°C.

Para temperaturas da placa entre 21°C e 40°C calcule o coeficiente de convecção entre a placa e o ar para duas posições da placa: vertical ou horizontal. Calcule também o fluxo de calor. A placa só transfere calor por uma das faces (superior no caso horizontal).

Resolução e discussão

Vamos comparar os coeficientes de convecção natural e fluxos de calor numa placa vertical e numa placa horizontal (médios), para várias diferenças de temperatura entre a placa e o fluido (ar). Para tal, vamos aplicar as correlações da Tabela 2.4. Para efetuar os cálculos foi criado um pequeno programa de computador que ajusta (faz variar) as propriedades físicas do ar, considerando sempre a temperatura média entre a temperatura da superfície da placa e a do ar.

Para a placa vertical foi considerada a correlação mais geral:

$$\overline{Nu} = \left[0,825 + \frac{0,387 (Gr.Pr)^{1/6}}{[1+(0,492/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right]^2, \text{ válida para } 10^4 < Gr.Pr \leq 10^{13}$$

sendo o Gr calculado com a dimensão característica igual à altura da placa (L), neste caso igual a 1 m.

Quanto à placa horizontal, considerando transferência de calor na face superior mais quente, foram usadas as 2 correlações da Tabela 2.4:

$$\overline{Nu} = 0,54 (Gr.Pr)^{1/4}, \text{ para } 10^4 < Gr.Pr \leq 10^7$$

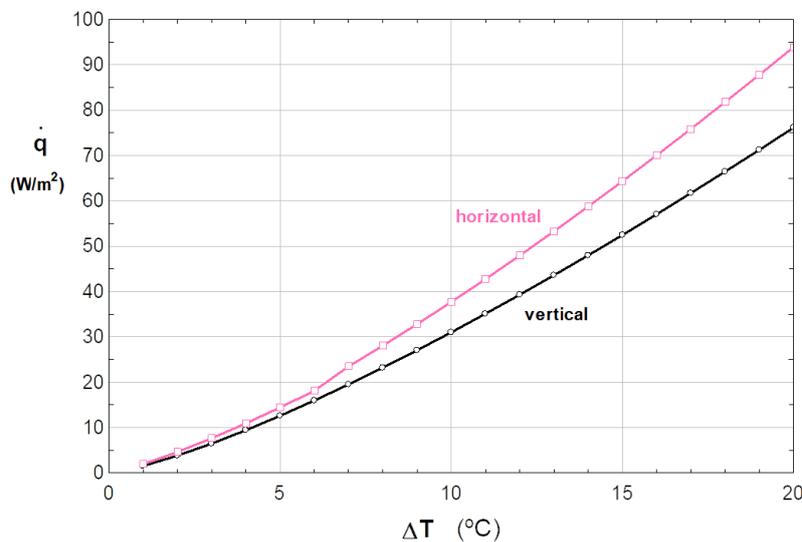
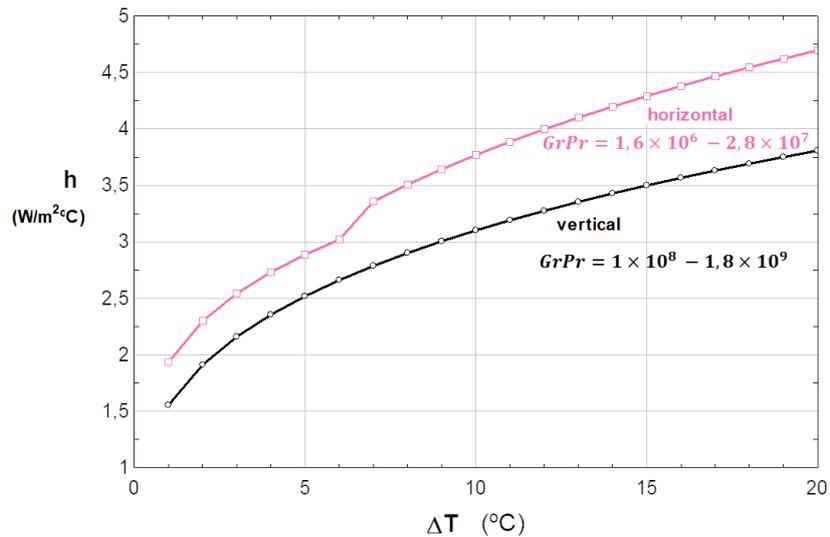
$$\overline{Nu} = 0,15 (Gr.Pr)^{1/3}, \text{ para } 10^7 < Gr.Pr \leq 10^{11}$$

Na placa horizontal a dimensão característica é igual à área da placa dividida pelo seu perímetro, o que neste caso equivale a $1/4 = 0,25$ m.

Para as propriedades do ar e as temperaturas da superfície consideradas – de 21 a 40°C – verificam-se sempre os limites de validade das correlações acima indicados.

Os coeficientes de convecção médios são calculados a partir das correlações acima (em função da diferença de temperaturas), e os fluxos pela multiplicação do coeficiente por ΔT .

Os gráficos seguintes representam os resultados obtidos, comparando as 2 posições das placas. Verifica-se que na face superior da placa horizontal o coeficiente de convecção é superior ao da placa vertical, para as mesmas temperaturas. Na placa vertical forma-se uma camada limite junto à superfície, que vai aumentando no sentido do escoamento (de baixo para cima), prejudicando a transferência de calor.



O coeficiente de convecção médio varia até 3,8 W/m²K para um ΔT de 20°C na placa vertical, e até 4,7 W/m²K para um ΔT de 20°C na placa horizontal. O aumento de h com ΔT não é proporcional, variando com ΔT elevado a um expoente menor que 1 (cerca de 0,3). Note-se que a descontinuidade na curva da placa horizontal é devida à utilização de 2 correlações para intervalos diferentes de $Gr.Pr$.

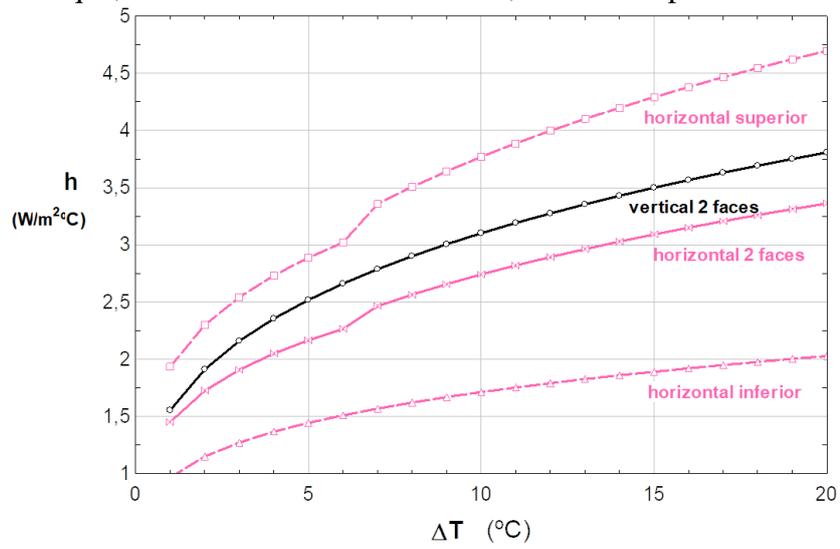
Já o fluxo de calor (e a potência) aumenta mais que proporcionalmente a ΔT , pois resulta da multiplicação de h por ΔT , sendo o expoente superior a 1.

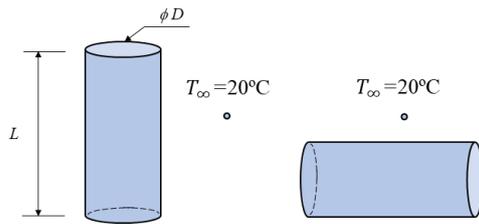
Assim, para uma placa arrefecer mais rapidamente quando em contacto com um fluido mais frio (a partir de uma dada temperatura inicial) ela deve ser colocada na horizontal. No entanto, se a transferência de calor se der pelas 2 faces a conclusão será diferente: numa placa vertical o coeficiente é igual nas 2 faces, enquanto numa placa horizontal o coeficiente na face inferior é cerca de metade do da face superior (pela maior dificuldade de movimentação do ar).

Para avaliar melhor essa situação, considere-se a correlação da Tabela 2.4 para a face inferior da placa horizontal:

$$\overline{Nu} = 0,27 (Gr.Pr)^{1/4} , \text{ para } 10^6 < Gr.Pr \leq 10^{11}$$

O gráfico seguinte mostra os coeficientes para as 2 faces e o valor médio para as 2 posições, concluindo-se que, com transferência nas 2 faces, é melhor a placa vertical.



P2.16

Um cilindro, com 10 cm de diâmetro e 1 m de altura, pode ser mantida a uma temperatura constante graças a um sistema de aquecimento de potência variável. Está rodeado de ar calmo, à temperatura de 20°C.

Para temperaturas da superfície do cilindro entre 1°C e 40°C calcule o coeficiente de convecção para duas posições do cilindro: vertical ou horizontal. Calcule também o fluxo de calor.

Resolução e discussão

Considere-se então um cilindro vertical e horizontal, aplicando as correlações da Tabela 2.4. Para efetuar os cálculos foi também criado um pequeno programa de computador que ajusta (faz variar) as propriedades físicas do ar, considerando sempre a temperatura média entre a temperatura da superfície do cilindro e a do ar.

Para o cilindro vertical foi considerada a correlação mais geral da placa vertical:

$$\overline{Nu} = \left[0,825 + \frac{0,387 (Gr.Pr)^{1/6}}{[1+(0,492/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right]^2, \text{ válida para } 10^4 < Gr.Pr \leq 10^{13}$$

sendo o Gr calculado com a dimensão característica igual à altura (L), neste caso igual a 1 m. Para esta correlação ser aplicável, a razão entre o diâmetro e a altura do cilindro deve satisfazer a relação

$$D \geq \frac{35 L}{Gr_L^{1/4}}$$

que iremos avaliar depois de calculado o número de Grashoff para as várias ΔT .

Quanto ao cilindro horizontal, a correlação da Tabela 2.4 é:

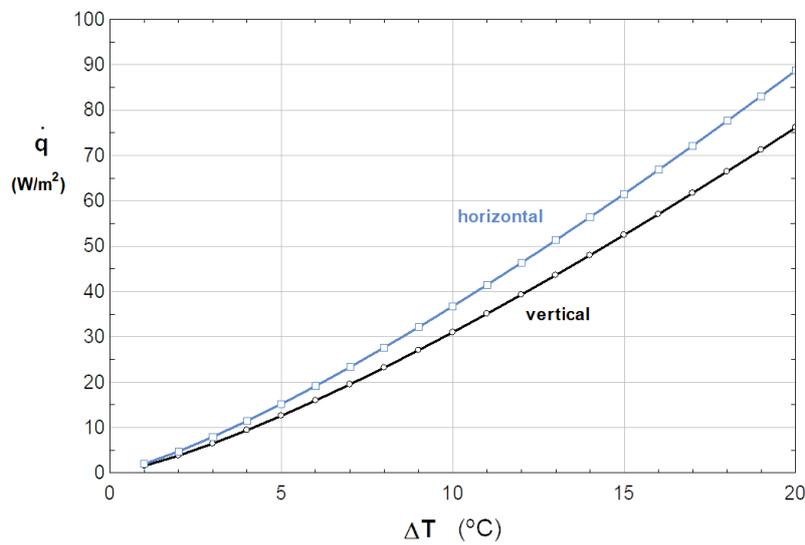
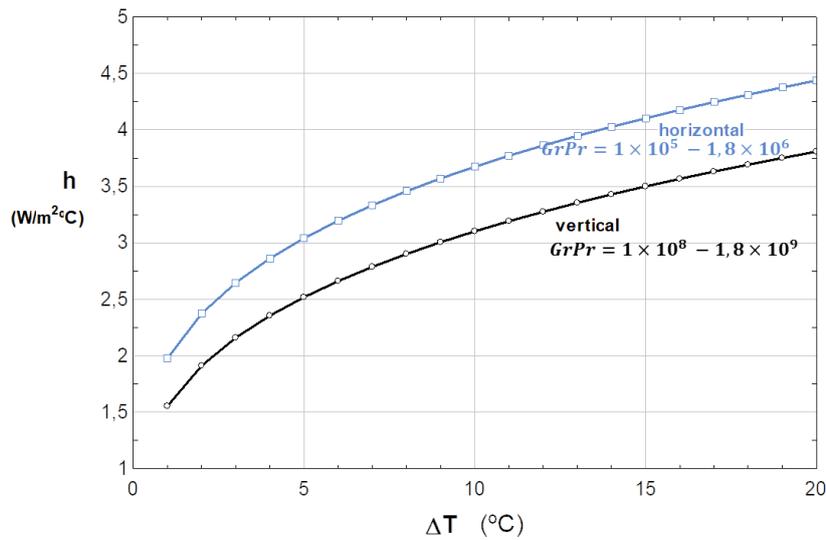
$$\overline{Nu} = \left[0,6 + \frac{0,387 (Gr.Pr)^{1/6}}{[1+(0,559/Pr)^{9/16}]^{8/27}} \right]^2, \text{ válida para } Gr.Pr \leq 10^{12}$$

No cilindro horizontal a dimensão característica é igual ao diâmetro, $D = 0,10$ m.

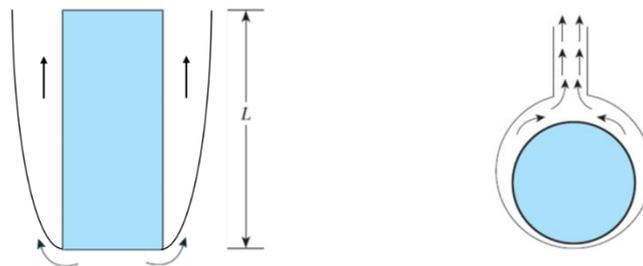
Para as propriedades do ar e as temperaturas da superfície consideradas – de 21 a 40°C – verificam-se sempre os limites de validade de $Gr.Pr$ das 2 correlações acima indicados. No entanto, a relação para D/L que valida a utilização da correlação para a placa vertical não se verifica, devendo o mínimo D estar entre 0,32 m e 0,15 m quando ΔT varia entre as temperaturas consideradas. No entanto, não sendo a diferença para 0,1 m muito grande, e na ausência de outra correlação, foi utilizada a da placa vertical, desprezando-se o efeito da curvatura da superfície.

Os coeficientes de convecção médios são calculados a partir das correlações acima (em função da diferença de temperaturas), e os fluxos pela multiplicação do coeficiente por ΔT .

Os gráficos seguintes representam os resultados obtidos, comparando as 2 posições dos cilindros. Verifica-se que no cilindro horizontal o coeficiente de convecção médio é superior ao do vertical, para as mesmas temperaturas.



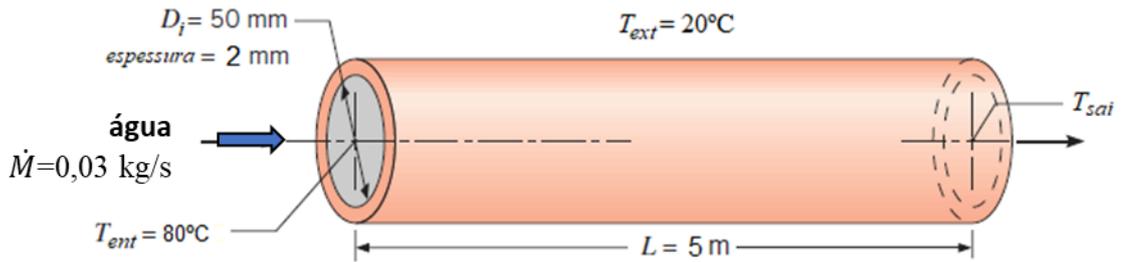
No cilindro vertical a camada limite junto à superfície cresce ao longo de um comprimento maior (L), o que faz reduzir o coeficiente de convecção local de baixo para cima, e também reduzir o coeficiente médio para toda a superfície. As figuras seguintes ilustram a evolução da camada limite nos 2 casos.



O coeficiente de convecção médio varia até 3,8 W/m²K para um ΔT de 20°C no cilindro vertical, e até 4,4 W/m²K para um ΔT de 20°C no cilindro horizontal. Tal como no caso das placas vertical e horizontal, o aumento de h com ΔT não é proporcional, variando com ΔT elevado a um expoente menor que 1, enquanto o fluxo de calor (e a potência) aumenta mais que proporcionalmente a ΔT .

Assim, para um cilindro arrefecer mais rapidamente quando em contacto com um fluido mais frio (a partir de uma dada temperatura inicial), deve ser colocado na horizontal, aumentando a transferência de calor.

P2.17



Numa instalação de água quente, esta sai de um coletor solar e entra no tubo da figura a 80°C. O tubo, com as dimensões da figura, tem $k = 13,4 \text{ W/mK}$. No exterior do tubo (ar a 20°C) existe apenas convecção natural, e o tubo está colocado horizontalmente.

Determine o coeficiente médio de convecção no interior do tubo, sabendo que à entrada o perfil de velocidades se encontra desenvolvido. Calcule a temperatura de saída da água e a temperatura média da superfície interior do tubo.

Propriedades a considerar para a água: $\rho_{ág}=974 \text{ kg/m}^3$, $c_{p,ág}=4195 \text{ J/kgK}$, $k_{ág}=0,668 \text{ W/mK}$, $\mu_{ág}=365 \times 10^{-6} \text{ Ns/m}^2$, $Pr_{ág}=2,29$.

Propriedades a considerar para o ar: $\rho_{ar}=1,204 \text{ kg/m}^3$, $c_{p,ar}=1007 \text{ J/kgK}$, $k_{ar}=0,0251 \text{ W/mK}$, $\nu_{ar}=1,516 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, $Pr_{ar}=0,731$, $\beta_{ar}=0,0034 \text{ K}^{-1}$.

Resolução e discussão

Trata-se do problema P2.11, com a diferença de o coeficiente de convecção exterior ao tubo ser agora devido à convecção natural. Assim sendo, ele depende da diferença de temperatura entre a superfície exterior do tubo e o ar exterior, diferença que não é conhecida por não se conhecer a temperatura do tubo.

Vamos recorrer à informação já calculada em P2.11, nomeadamente o coeficiente de convecção médio no interior do tubo:

$$\bar{h}_{int} = \frac{\overline{Nu}_{D,int} k_{ág}}{D_{int}} = \frac{5,74 \times 0,668}{0,050} = 76,7 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Como visto em P2.11, a temperatura (média) de saída da água pode relacionar-se com a temperatura de entrada e a temperatura média da superfície interior do tubo – equação (2.26):

$$\frac{T_{sai} - \bar{T}_{sup,int}}{T_{ent} - \bar{T}_{sup,int}} = \exp\left(-\frac{\bar{h}_{int} \pi D_{int} L}{\dot{M} c_p}\right)$$

e a temperatura média da superfície interior do tubo pode relacionar-se com a transferência de calor para o exterior e a variação de temperatura da água:

$$\frac{\bar{T}_{sup,int} - T_{ext}}{\frac{\ln(D_{ext}/D_{int})}{2\pi k_t L} + \frac{1}{h_{ext} \pi D_{ext} L}} = \dot{M} c_p (T_{ent} - T_{sai})$$

Agora, sendo h_{ext} função da temperatura da superfície exterior do tubo, $\bar{T}_{sup,ext}$, intervém uma incógnita adicional. Atendendo à reduzida espessura e à pequena resistência de condução do tubo, poderíamos desprezar a diferença de temperatura entre a superfície interior e exterior do tubo. No entanto vamos considerá-la, para um tratamento mais geral do problema.

Dessa forma, temos de relacionar h_{ext} com $(\bar{T}_{sup,ext} - T_{ext})$, e utilizar uma equação adicional para cálculo de $\bar{T}_{sup,ext}$, que pode ser a igualdade entre a potência que atravessa o tubo por condução e a potência de convecção exterior:

$$\frac{2\pi k_t L}{\ln(D_{ext}/D_{int})} (\bar{T}_{sup,int} - \bar{T}_{sup,ext}) = h_{ext} \pi D_{ext} L (\bar{T}_{sup,ext} - T_{ext})$$

Para relacionar h_{ext} com $(\bar{T}_{sup,ext} - T_{ext})$ vamos usar a correlação da Tabela 2.4 para cilindros horizontais:

$$\bar{Nu}_{ext} = \left[0,6 + \frac{0,387 (Gr_D.Pr)^{1/6}}{[1+(0,559/Pr)^9/16]^{8/27}} \right]^2, \text{ válida para } Gr_D.Pr \leq 10^{12}$$

com

$$Gr_D.Pr = \frac{g\beta_{ar}(\bar{T}_{sup,ext} - T_{\infty})D_{ext}^3}{(\nu_{ar})^2} Pr = 16688 \times (\bar{T}_{sup,ext} - 20)$$

sendo $Gr_D.Pr$ sempre inferior a 10^{12} (mesmo que $\bar{T}_{sup,ext}$ fosse igual a 80°C).

Então o coeficiente de convecção exterior pode relacionar-se com $(\bar{T}_{sup,ext} - T_{ext})$ através de:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{ext} &= \frac{\bar{Nu}_{ext} k_{ar}}{D_{ext}} = \frac{0,0251}{0,054} \times \left[0,6 + \frac{0,387 \times (16688 \times (\bar{T}_{sup,ext} - 20))^{1/6}}{[1+(0,559/0,731)^9/16]^{8/27}} \right]^2 = \\ &= 0,465 \times \left[0,6 + 1,628 \times (\bar{T}_{sup,ext} - 20)^{1/6} \right]^2 \end{aligned}$$

Temos assim um sistema de 3 equações que permite calcular T_{sai} , $\bar{T}_{sup,int}$ e $\bar{T}_{sup,ext}$:

$$\begin{cases} \frac{T_{sai} - \bar{T}_{sup,int}}{80 - \bar{T}_{sup,int}} = \exp\left(-\frac{76,7 \times \pi \times 0,05 \times 5}{0,03 \times 4195}\right) \\ \frac{2\pi \times 13,4 \times 5}{\ln(54/50)} (\bar{T}_{sup,int} - \bar{T}_{sup,ext}) = 0,03 \times 4195 \times (80 - T_{sai}) \\ \frac{2\pi \times 13,4 \times 5}{\ln(54/50)} (\bar{T}_{sup,int} - \bar{T}_{sup,ext}) = 0,465 \times \left[0,6 + 1,628 \times (\bar{T}_{sup,ext} - 20)^{1/6} \right]^2 \times \pi \times 0,054 \times 5 \times (\bar{T}_{sup,ext} - 20) \end{cases}$$

onde se substituiu a 2ª equação pela igualdade entre a potência de condução no tubo e a potência perdida pela água, e que equivale a

$$\begin{cases} T_{sai} - \bar{T}_{sup,int} = (80 - \bar{T}_{sup,int}) \times 0,6196 \\ 5470 \times (\bar{T}_{sup,int} - \bar{T}_{sup,ext}) = 125,85 \times (80 - T_{sai}) \\ 5470 \times (\bar{T}_{sup,int} - \bar{T}_{sup,ext}) = 0,3944 \times \left[0,6 + 1,628 \times (\bar{T}_{sup,ext} - 20)^{1/6} \right]^2 \times (\bar{T}_{sup,ext} - 20) \end{cases}$$

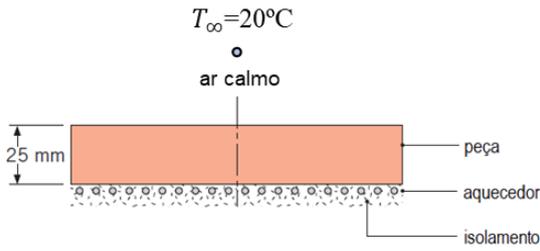
Note-se a não linearidade do sistema, introduzida pela dependência não linear do coeficiente de convecção natural em ΔT . O sistema resulta em:

$$\begin{cases} T_{sai} = 77,6^\circ\text{C} \\ \bar{T}_{sup,int} = 73,74^\circ\text{C} \\ \bar{T}_{sup,ext} = 73,69^\circ\text{C} \end{cases}$$

O coeficiente de convecção natural (exterior) é então igual a $6,6 \text{ W/m}^2\text{C}$.

Este menor coeficiente de convecção (o anterior era de $20 \text{ W/m}^2\text{C}$) faz com que o tubo perca menos calor, sendo a sua temperatura mais alta – a superfície interior está a $73,74^\circ\text{C}$, quando antes estava a $64,3^\circ\text{C}$. A água arrefece agora apenas $2,4^\circ\text{C}$ (em vez de 6°C) entre a entrada e a saída, o que corresponde a uma potência perdida de 302 W .

P2.18



Durante o tratamento térmico da peça da figura esta é aquecida até uma temperatura de 100°C (uniforme). Após certo tempo, desliga-se o aquecedor e a peça é arrefecida, trocando apenas calor por convecção com o ar na face superior.

A peça, com 20 cm de diâmetro, tem $\rho = 2770 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 880 \text{ J/kgK}$ e $k = 179 \text{ W/mK}$.

Escreva o coeficiente de convecção em função da temperatura da superfície da peça, admitindo propriedades do ar constantes, e calcule o tempo necessário a que a face inferior da peça atinja 30°C .

Resolução e discussão

Trata-se de um problema instacionário, uma vez que a temperatura da peça varia ao longo do tempo. A peça está sujeita a arrefecimento por convecção na face superior. No entanto, havendo convecção natural, o coeficiente de convecção varia ao longo do tempo, por variar a temperatura superficial.

Assim, no caso de se considerar a variação da temperatura da peça com a espessura (25 mm), a solução analítica vista em 1.2.2 não é aplicável, pois pressupõe um coeficiente constante ao longo do tempo. A solução de considerar a peça como um sistema global, vista em 1.2.1 – equação (1.42) – também não é aplicável, pelas mesmas razões. No entanto, no caso do sistema global (condição a verificar) poder-se-á encontrar uma solução analítica, recorrendo ao balanço fundamental

$$\rho V c_p \frac{dT}{dt} = h A_{conv} (T_{\infty} - T)$$

Escrevendo o coeficiente h em função de ΔT é possível resolver esta equação. Então consideremos a correlação da Tabela 2.4 para uma placa (superfície) horizontal e propriedades do ar a uma temperatura média – média entre a superfície e o ar exterior, tomando-se para a superfície a média entre a temperatura inicial e final, ou seja, $130/2 = 65^{\circ}\text{C}$. Assim, a temperatura média para avaliação das propriedades será $(65 + 20)/2 = 42,5^{\circ}\text{C}$.

As propriedades do ar a essa temperatura (e à pressão atmosférica) são: $\rho_{ar} = 1,104 \text{ kg/m}^3$, $c_{p,ar} = 1007 \text{ J/kgK}$, $k_{ar} = 0,0268 \text{ W/mK}$, $\mu_{ar} = 1,93 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$, $Pr_{ar} = 0,724$, $\beta_{ar} = 0,00317 \text{ K}^{-1}$.

Então temos:

$$h = \frac{\overline{Nu} k_{ar}}{A_s/P} = \frac{0,0268}{D/4} \times 0,54 (Gr.Pr)^{1/4} = \frac{0,0268 \times 0,54}{0,20/4} \times 0,724^{1/4} \times \left(\frac{9,8 \times 0,00317 \times (0,20/4)^3}{(1,93 \times 10^{-5} / 1,104)^2} \right)^{1/4} \times \Delta T^{1/4} = 2,835 \times \Delta T^{1/4}$$

admitindo (a verificar) que $10^4 < Gr.Pr \leq 10^7$. No instante inicial $\Delta T = 100 - 20 = 80^{\circ}\text{C}$, vindo $Gr.Pr = 7,36 \times 10^5$ (que verifica a condição de validade da correlação) e $h = 8,5 \text{ W/m}^2\text{K}$. No instante final $\Delta T = 30 - 20 = 10^{\circ}\text{C}$, vindo $Gr.Pr = 9,20 \times 10^4$ (que também verifica a condição de validade da correlação) e $h = 5,0 \text{ W/m}^2\text{K}$.

Quanto à consideração da peça como um sistema global, há que verificar se o número de Biot permite essa suposição. O caso mais desfavorável (maior Bi) corresponde ao instante inicial, quando

$$Bi_{aço} = \frac{h (V/A_{conv})_{peça}}{k_{peça}} = \frac{8,5 \times 0,025}{179} = 0,0012$$

muito menor que 0,1, validando a hipótese de sistema global.

Podemos então usar a relação entre h e ΔT na equação diferencial anterior, com o pressuposto de que em cada instante temos convecção em regime permanente, vindo

$$(\rho V c_p)_{peça} \frac{dT}{dt} = -2,835 \times A_{conv} (T - 20)^{5/4}$$

que resulta em

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{2,835}{2770 \times 880 \times 0,025} (T - 20)^{5/4} = -4,652 \times 10^{-5} (T - 20)^{5/4}$$

que integrada, sujeita à condição $T|_{t=0} = 100^\circ\text{C}$, resulta em

$$(T - 20)^{-1/4} = (100 - 20)^{-1/4} + 1,163 \times 10^{-5} t$$

Para se ter $T = 30^\circ\text{C}$ serão então necessários $t = 19602$ segundos, ou 5,4 horas.

Pode analisar-se o resultado da utilização da equação (1.42), com um coeficiente de convecção médio, igual à média aritmética do coeficiente inicial e final. Sendo estes iguais a 8,5 e 5,0 $\text{W/m}^2\text{K}$, a média aritmética é de 6,75 $\text{W/m}^2\text{K}$, que utilizada na equação (1.42) conduz a

$$\frac{30-20}{100-20} = \exp\left(-\frac{6,75}{2770 \times 880 \times 0,025} t\right)$$

resultando em $t = 18774$ segundos, ou 5,2 horas.

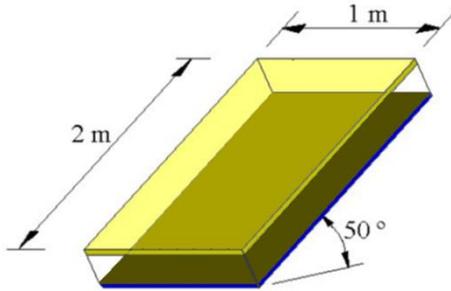
Em alternativa, também se poderia utilizar um coeficiente médio (constante) igual ao coeficiente para a temperatura média aritmética entre a inicial e a final. Sendo essa temperatura média igual a $(100+30)/2=65^\circ\text{C}$, viria

$$h(\bar{T}) = 2,835 \times (65 - 20)^{1/4} = 7,3 \text{ W/m}^2\text{K}$$

que sendo substituído na equação anterior conduz a $t = 17359$ segundos, ou 4,8 horas.

Qualquer destes cálculos aproximados introduz um erro no resultado – 4% no 1º caso e 11% no 2º caso – ambos subestimando o tempo de arrefecimento.

P2.19



Um coletor solar plano tem uma cobertura de vidro e uma placa absorvente (da radiação solar) espaçadas entre si, contendo ar entre ambas (à pressão atmosférica). Os topos são selados a toda a volta.

Para um dado valor de radiação solar, o coletor atinge o equilíbrio térmico, sendo a temperatura da placa de 60°C e a temperatura do vidro de 30°C.

Nessas condições, e sabendo que a distância entre a placa e o vidro é de 15 mm, calcule o coeficiente de convecção entre a placa e o vidro, bem como a potência perdida por convecção.

Analise se a distância entre a placa e o vidro será a mais adequada, nas condições de temperatura existentes. Discuta também o que se passará para temperaturas diferentes.

Resolução e discussão

Temos aqui um caso de convecção natural numa cavidade retangular, formada no espaço entre a placa e a cobertura de vidro. O coeficiente de convecção pode ser obtido com auxílio da correlação (2.30), em que a dimensão característica é a distância entre a placa e o vidro (L):

$$\overline{Nu}_L = 1 + 1,44 \left[1 - \frac{1708}{Ra_L \cos \theta} \right]^+ \left(1 - \frac{1708 (\sin 1,8 \theta)^{1,6}}{Ra_L \cos \theta} \right) + \left[\frac{(Ra_L \cos \theta)^{1/3}}{18} - 1 \right]^+$$

sendo θ o ângulo em relação à horizontal (neste caso 50°) e denotando o sinal + que se o valor calculado for negativo deve ser tomado como zero; a correlação é válida para $Ra_L \leq 10^5$, $H/L \geq 12$ e $0 \leq \theta < 70^\circ$. O coeficiente de convecção pode depois ser calculado por

$$h = \frac{\overline{Nu}_L k_{ar}}{L}$$

Vamos então começar por considerar propriedades do ar à temperatura média aritmética entre 60 e 30°C, ou seja a 45°C (e à pressão atmosférica): $\rho=1,095 \text{ kg/m}^3$, $k=0,0270 \text{ W/mK}$, $\mu=1,94 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$, $Pr=0,723$, $\beta=0,00314 \text{ K}^{-1}$. Então temos:

$$Ra_L = Gr_L \cdot Pr = \frac{9,8 \times 0,00314 \times (60-30) \times 0,015^3}{(1,94 \times 10^{-5} / 1,095)^2} \times 0,723 = 6549$$

vindo, da correlação acima:

$$\begin{aligned} \overline{Nu}_L &= 1 + 1,44 \left[1 - \frac{1708}{6549 \cos 50^\circ} \right]^+ \left(1 - \frac{1708 (\sin 90^\circ)^{1,6}}{6549 \cos 50^\circ} \right) + \left[\frac{(6549 \cos 50^\circ)^{1/3}}{18} - 1 \right]^+ = \\ &= 1,51 \end{aligned}$$

valor que significa que a transferência de calor é 1,5 vezes maior do que se verificaria se houvesse condução na camada de ar de 15 mm de espessura; o coeficiente de convecção é então

$$h = \frac{1,51 \times 0,0270}{0,015} = 2,7 \text{ W/m}^2\text{°C}$$

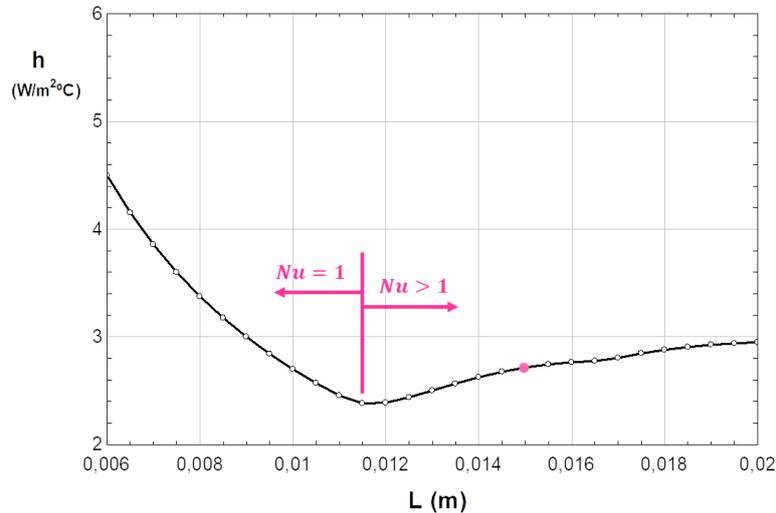
Note-se que são satisfeitos os limites de aplicação da correlação do \overline{Nu}_L : $\theta = 50^\circ$, $Ra_L \leq 10^5$ e $H/L = 2/0,015 = 133 \geq 12$.

A potência trocada por convecção é:

$$\dot{Q} = hA(T_{placa} - T_{vidro}) = 2,7 \times 2 \times 1 \times (60 - 30) = 162 \text{ W}$$

Vamos agora analisar como varia o coeficiente de convecção com a espessura da cavidade, de modo a avaliar se é ou não adequada a minimizar as perdas de calor para a cobertura. Num coletor solar deste tipo, quanto menores forem essas perdas, mais calor está disponível para transferir da placa para um fluido circulando na sua face posterior.

Variando a distância placa-vidro, obtiveram-se os resultados do gráfico seguinte, admitindo que as temperaturas da placa e do vidro se mantêm.



Para todos os valores de L (entre 6 e 20 mm) se verifica a condição $Ra_L \leq 10^5$. Para distâncias mais pequenas verifica-se que $Nu=1$, havendo condução na camada de ar: ao aumentar a espessura diminui a transferência de calor. A partir de uma dada distância o ar já se movimenta, dando origem à convecção natural, vindo $Nu>1$, e aumentando o coeficiente de convecção com o aumento de L . A partir de certo ponto há uma tendência para o coeficiente estabilizar. Isto significa que existe uma distância ótima, à qual corresponde o mínimo coeficiente (e a mínima potência trocada). O valor ótimo de L está muito próximo do que torna $Ra_L \cos \theta = 1708$ na correlação do Nu (anulando a 2ª e 3ª parcelas da correlação), ou seja:

$$Ra_L \cos \theta = \frac{9,8 \times 0,00314 \times (60 - 30) \times L^3}{(1,94 \times 10^{-5} / 1,095)^2} \times 0,723 \times \cos 50^\circ = 1708 \Rightarrow L = 0,011 \text{ m}$$

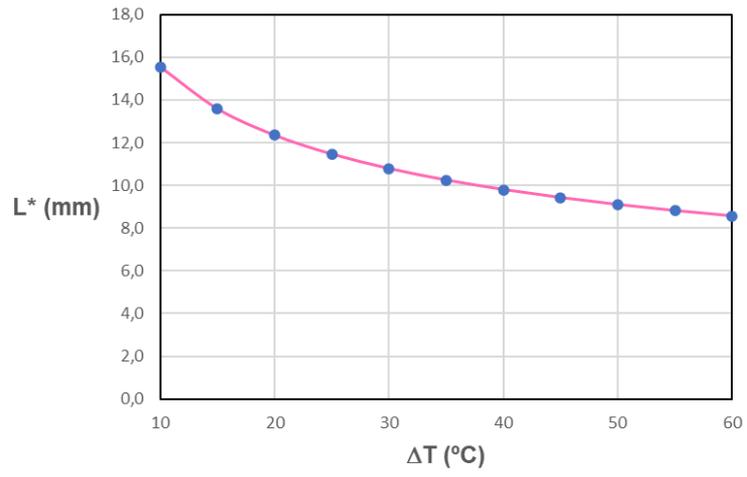
Assim, a distância de 15 mm não é a ideal para minimizar as perdas de calor do coletor, para as temperaturas em causa.

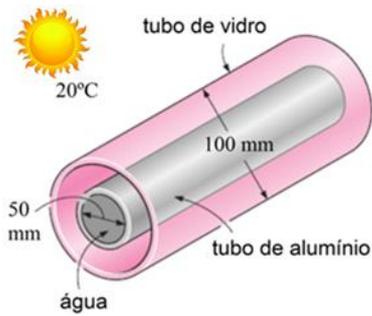
Mas durante o funcionamento do coletor essas temperaturas variam (ao variar a radiação solar recebida pelo coletor). Ao variarem as temperaturas, e em especial ΔT , o ponto ótimo irá deslocar-se. Admitindo que as propriedades se mantêm, podemos relacionar a distância ótima com ΔT , impondo a condição $Ra_L \cos \theta = 1708$.

Desse modo, vem

$$L_{\text{ótimo}} = \frac{0,0335}{\Delta T^{1/3}}$$

Assim, ao aumentar ΔT , o que acontece quando aumenta a radiação solar recebida, diminui a distância ótima. O gráfico seguinte ilustra a variação, que se deve a uma maior facilidade de movimentação do ar ao aumentar ΔT : com maior ΔT a convecção inicia-se para L mais baixo. A gama de valores de L entre 10 e 12 mm (em torno de 11 mm) é adequada à maior parte das condições operativas num coletor deste tipo.



P2.20


Um coletor solar é constituído por vários tubos de vidro (com 100 mm de diâmetro), no interior dos quais existe um outro tubo em alumínio (com 50 mm de diâmetro) que absorve a radiação solar incidente. O espaço entre os tubos contém ar à pressão atmosférica. Os tubos têm um comprimento de 2 m e são selados nas extremidades, estando colocados na horizontal.

Num dia de céu limpo, com radiação elevada, a temperatura atingida pelo tubo de alumínio é de 45°C, e a do tubo de vidro de 23°C.

Nessas condições, calcule o coeficiente de convecção entre os dois tubos, bem como a potência perdida por convecção. Avalie o efeito da variação do diâmetro do tubo de vidro no coeficiente de convecção.

Resolução e discussão

Num coletor solar de tubos é frequentemente evacuado o espaço dentro do tubo de vidro, suprimindo a convecção, de modo a reduzir ao máximo as perdas de calor – são os chamados coletores de tubos de vácuo. No entanto, também existem coletores não evacuados, como neste caso. Aqui trata-se de avaliar o efeito da convecção na cavidade de ar entre tubos.

O coeficiente de convecção pode ser obtido com auxílio da correlação (2.36):

$$\overline{Nu}_{L_c} = \frac{k_{ef}}{k} = 0,386 \left(\frac{Pr}{0,861+Pr} \right)^{1/4} (Ra_{L_c})^{1/4}$$

válida para $0,7 \leq Pr \leq 6000$ e $10^2 < Ra_{L_c} \leq 10^7$, e sendo a dimensão característica (L_c) dada pela equação (2.37):

$$L_c = \frac{2 [\ln(r_{ext}/r_{int})]^{4/3}}{(r_{int}^{-3/5} + r_{ext}^{-3/5})^{5/3}}$$

Note-se que se $Ra_{L_c} \leq 100$ há condução ($k_{ef} = k$). A potência transferida obtém-se a partir de k_{ef} :

$$\dot{Q} = \frac{2\pi L k_{ef} (T_{int} - T_{ext})}{\ln(r_{ext}/r_{int})}$$

Vamos utilizar propriedades do ar à temperatura média (aritmética) dos 2 tubos (34°C): $\rho = 1,134 \text{ kg/m}^3$, $k = 0,0262 \text{ W/mK}$, $\mu = 1,89 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$, $Pr = 0,726$, $\beta = 0,00326 \text{ K}^{-1}$. Então, com os restantes dados do problema:

$$L_c = \frac{2 [\ln(r_{ext}/r_{int})]^{4/3}}{(r_{int}^{-3/5} + r_{ext}^{-3/5})^{5/3}} = \frac{2 \times [\ln(50/25)]^{4/3}}{(0,025^{-3/5} + 0,050^{-3/5})^{5/3}} = 0,0132 \text{ m}$$

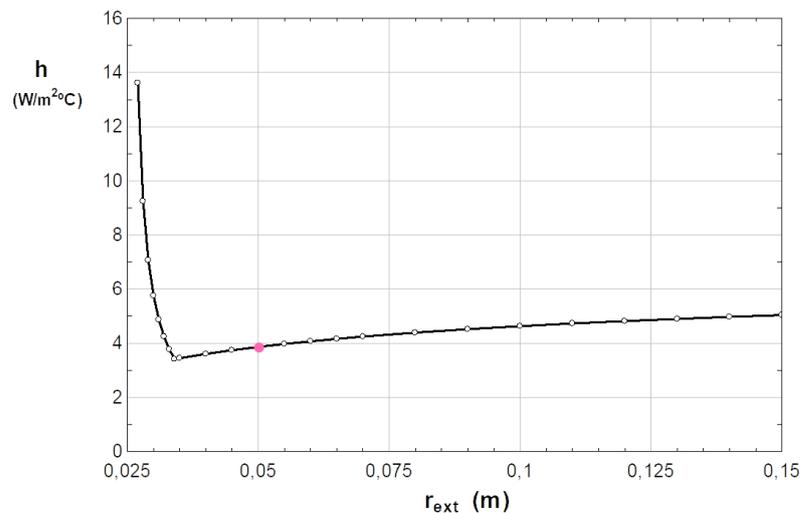
$$\begin{aligned} \frac{k_{ef}}{k} &= 0,386 \left(\frac{Pr}{0,861+Pr} \right)^{1/4} (Ra_{L_c})^{1/4} = \\ &= 0,386 \times \left(\frac{0,726}{0,861+0,726} \right)^{1/4} \times \left(\frac{9,8 \times 0,00326 \times (45-23) \times 0,0132^3 \times 0,726}{(1,89 \times 10^{-5} / 1,134)^2} \right)^{1/4} = \\ &= 0,317 \times 4225^{1/4} = 2,6 \end{aligned}$$

Assim, passa 2,6 vezes mais calor do que se houvesse condução no ar, e $k_{ef} = 0,0681 \text{ W/m}^\circ\text{C}$. A potência calorífica vem igual a:

$$\dot{Q} = \frac{2\pi L k_{ef} (T_{int} - T_{ext})}{\ln(r_{ext}/r_{int})} = \frac{2\pi \times 2 \times 0,0681 \times (45 - 23)}{\ln(50/25)} = 27 \text{ W}$$

Se quisermos indicar um coeficiente de convecção, usando como referência a área do tubo interior, ele será igual a $3,9 \text{ W/m}^2_{int}^\circ\text{C}$.

Vamos agora analisar como varia o coeficiente de convecção com o espaço entre tubos. Repetindo os cálculos anteriores para vários diâmetros do tubo de vidro obteve-se o gráfico seguinte, admitindo que as temperaturas da placa e do vidro se mantêm.

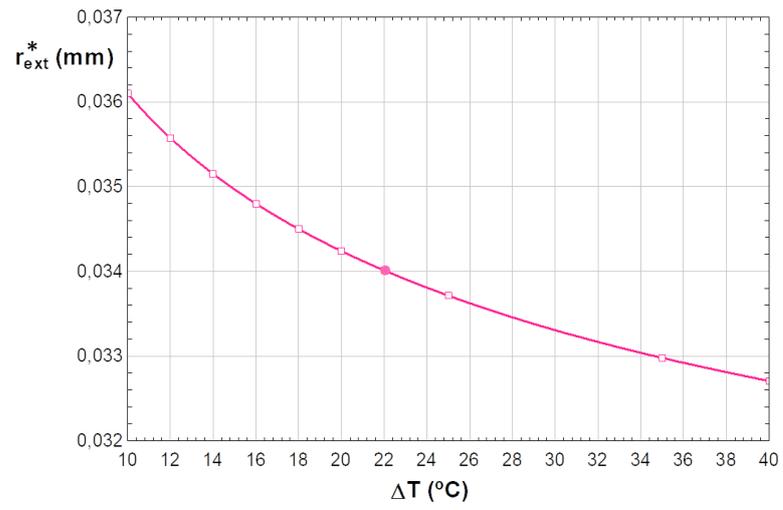


Para todos os valores de r_{ext} (entre 27 e 150 mm) se verifica a condição $Ra_L \leq 10^5$. Tal como no problema P2.19, para raios/diâmetros mais pequenos verifica-se que $Nu=1$ ($k_{ef} = k$), havendo condução na camada de ar. Isso verifica-se até que $Ra_{Lc} = 100$, o que ocorre para um raio de 34 mm. A partir daí ocorre movimento do ar e o coeficiente aumenta. O valor ótimo de r_{ext} (espaço entre tubos) pode então obter-se igualando Ra_{Lc} a 100. No entanto, em comparação com o problema P2.19, a convecção ocorre com espessuras da camada de ar menores, pelo que uma pequena variação do raio (para valores inferiores ao ótimo) se pode traduzir num aumento significativo do calor perdido.

Durante o funcionamento do coletor com diferentes temperaturas, o ponto ótimo irá deslocar-se. Admitindo que as propriedades se mantêm, podemos relacionar a distância ótima com ΔT , impondo a condição $Ra_{Lc} = 100$. Obter-se-á:

$$L_{c\acute{o}t\text{imo}} = \frac{0,01062}{\Delta T^{1/3}}$$

O gráfico seguinte ilustra a variação do raio exterior (do tubo de vidro) ótimo em função de ΔT . Ao aumentar ΔT há uma maior facilidade de movimentação do ar, pelo que o ótimo corresponde a um menor espaço entre tubos. Raios entre 33 e 36 mm – ou espaços entre tubos entre 8 e 11 mm – correspondem ao ótimo para diferenças de temperatura entre 35 e 10°C. No entanto, como dito anteriormente, o modo mais eficaz de reduzir as perdas convectivas deste coletor é a utilização do vácuo entre os 2 tubos.



3 Condensação em filme

A condensação, tal como a convecção, ocorre num fluido em movimento. O que a distingue da convecção é a ocorrência de mudança de fase: um vapor a temperatura igual ou superior à de saturação (à pressão a que se encontra) passa, total ou parcialmente ao estado líquido. Para que tal aconteça, o fluido entra em contacto com uma superfície a temperatura inferior à de saturação, formando-se uma zona de líquido junto à superfície fria. Veremos como quantificar o coeficiente de transferência de calor quando toda a superfície fria é coberta por uma película de líquido – condensação em filme – que é a situação mais corrente na prática. As geometrias a considerar para a superfície são: placa plana, cilindro e feixes de tubos, e esferas.

3.1 Condensação em filme e em gotas

Na maior parte das superfícies, a película de líquido que se forma junto a elas estende-se a toda a sua área. O líquido escorre na vertical, de cima para baixo, por ação da gravidade, uma vez que é mais pesado que o vapor que o rodeia. Nas superfícies com muito pequena rugosidade, como vidros, espelhos ou metais muito polidos, formam-se gotas de líquido junto à superfície fria, que escorrem nesta (também de cima para baixo), não se formando uma película contínua líquida. Neste caso, as gotas cobrem a maior parte da área da superfície fria. A Figura 3.1 ilustra as duas situações.

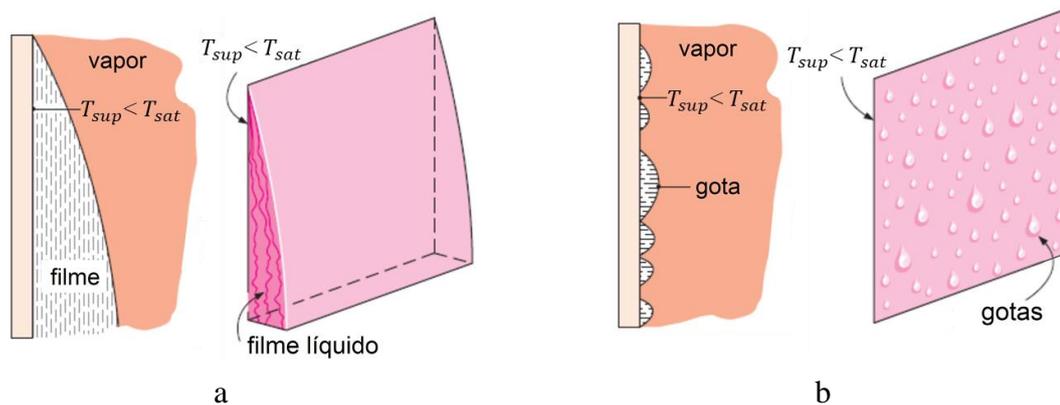


Figura 3.1 – Tipos de condensação: (a) em filme; (b) em gotas.

Ao condensar, o fluido liberta o seu calor latente de vaporização (diferença entre a entalpia do vapor saturado e a do líquido saturado), o que, devido ao seu elevado valor, gera taxas de transferência de calor elevadas. Esse calor transfere-se da temperatura mais alta (T_{sat}) para a mais baixa (T_{sup}), mas para atingir a superfície tem de atravessar o líquido, que oferece uma resistência (térmica) a essa transferência. Assim, quanto maior a quantidade de líquido presente, menor será o coeficiente de transferência. Por esse motivo, na condensação por gotas conseguem-se coeficientes (bastante) mais elevados. No entanto, para além de superfícies

especiais, a condensação por gotas é difícil de controlar, motivos pelos quais na maior parte das aplicações práticas (condensadores de vapor) se usa a condensação em filme.

3.2 Modelo simplificado de Nusselt

Existe um modelo teórico simplificado para a condensação em filme junto a uma placa vertical – o modelo de Nusselt. Este modelo assenta em várias hipóteses simplificativas, que são: (i) o escoamento do líquido dá-se em regime laminar e com propriedades constantes; (ii) a fase gasosa é constituída por vapor puro a T_{sat} ; (iii) o atrito na interface líquido-vapor é desprezável, sendo a velocidade do líquido máxima na extremidade da película (δ) e a velocidade do vapor nula; (iv) o transporte convectivo de quantidade de movimento e energia no filme é desprezável, devido à baixa velocidade. A Figura 3.2 ilustra os perfis simplificados de velocidade e temperatura no filme líquido.

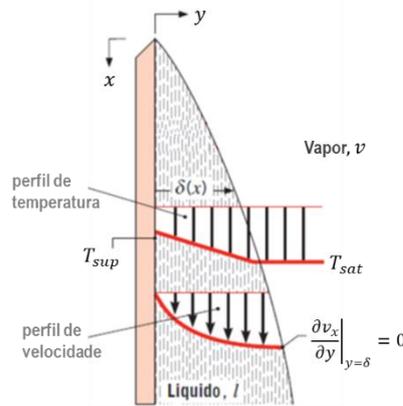


Figura 3.2 – Perfis de velocidade e temperatura simplificados no modelo de Nusselt de condensação em filme.

Recorrendo então ao balanço da quantidade de movimento e energia para um elemento de volume do filme líquido de comprimento dx , é possível chegar a uma relação entre a espessura do filme líquido (δ) e o comprimento/altura de escoamento (x), e que é:

$$\delta(x) = \left[\frac{4\mu_l k_l (T_{sat} - T_{sup}) x}{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) \Delta h_{lv}} \right]^{1/4} \quad (3.1)$$

denotando o índice l as propriedades do líquido, v as do vapor saturado, e sendo Δh_{lv} o calor latente de vaporização/condensação. Atente-se que o aumento da diferença de temperatura provoca um aumento da espessura do filme líquido (mais vapor condensa).

O coeficiente de transferência de calor, na hipótese de transporte convectivo desprezável, corresponde ao coeficiente de condução através da espessura de filme, ou seja

$$h_x = \frac{k_l}{\delta} = \left[\frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3 \Delta h_{lv}}{4\mu_l (T_{sat} - T_{sup}) x} \right]^{1/4} \quad (3.2)$$

Calculando a média para o comprimento/altura L , vem:

$$\bar{h}_L = 0,943 \left[\frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3 \Delta h_{lv}}{\mu_l (T_{sat} - T_{sup}) L} \right]^{1/4} \quad (3.3)$$

Nesta equação as propriedades do líquido devem ser avaliadas à temperatura média (aritmética) entre a de saturação e a da superfície, enquanto ρ_v e Δh_{lv} devem ser avaliadas á temperatura de saturação.

Ao comparar os resultados deste modelo simplificado e da equação (3.3) com resultados experimentais, concluiu-se que o modelo subestima a transferência de calor, por não considerar o perfil não linear de temperatura no filme, a convecção, e o subarrefecimento do líquido; assim introduziu-se uma correção no calor latente já incluída na equação (3.3):

$$\Delta h'_{lv} = \Delta h_{lv} + 0,68 c_{pl}(T_{sat} - T_{sup}) \quad (3.4)$$

O caudal condensado pode calcular-se a partir de

$$\dot{M}_l = \frac{\dot{Q}}{\Delta h'_{lv}} = \frac{\bar{h}_l A (T_{sat} - T_{sup})}{\Delta h'_{lv}} \quad (3.5)$$

A equação (3.3), com a correção expressa por (3.4), é portanto válida para regime de escoamento a baixa velocidade – laminar – do filme de líquido. Este regime verifica-se até um certo limite da velocidade, a que corresponde um determinado limite do número de Reynolds. Esse Re pode definir-se a partir de um diâmetro hidráulico:

$$D_h = \frac{4A_s}{P_{molhado}} = \frac{4l\delta}{l} = 4\delta \quad (3.6)$$

onde l é a largura do filme em contacto com a superfície.

Com essa definição, o Re aumenta com o aumento de δ :

$$Re_\delta = \frac{\rho_l v_m^4 \delta}{\mu_l} = \frac{4\dot{M}_l}{\mu_l l} \quad (3.7)$$

Verifica-se que o regime de escoamento do filme é laminar para $Re < 1800$, distinguindo-se o regime laminar não ondulante ($Re < 30$) e o laminar ondulante (Re de 30 a 1800). A partir de $Re = 1800$, o regime de escoamento torna-se turbulento. A equação (3.3) dá bons resultados para o regime laminar não ondulante ($Re < 30$).

3.3 Correlações para placas, cilindros e esferas

Para o caso da condensação numa placa vertical é possível, desprezando ρ_v face a ρ_l , escrever o número de Reynolds como:

$$Re_\delta = \frac{4g\rho_l^2\delta^3}{3\mu_l^2} \quad (3.8)$$

Combinando a equação (3.8) com as equações (3.1) e (3.3) é possível chegar a

$$\frac{\bar{h}_l(v_l^2/g)^{1/3}}{\kappa_l} = 1,47 Re_\delta^{-1/3} \quad (3.9)$$

válida portanto para $Re_\delta \leq 30$ – regime laminar não ondulante, sendo o Re calculado para a espessura na extremidade inferior da placa ($x=L$). Para os outros regimes devem usar-se outras correlações, apresentadas na Figura 3.3.

Para contornar o facto de Re_δ não ser conhecido sem saber δ ou \dot{m}_l , pode definir-se um parâmetro de condensação

$$P = \frac{\kappa_l L (T_{sat} - T_{sup})}{\mu_l \Delta h'_{lv} (v_l^2/g)^{1/3}} \quad (3.10)$$

que permite efetuar diretamente o cálculo do coeficiente de transferência, sem necessidade de um processo iterativo. A Figura 3.4 apresenta as correlações com a utilização deste parâmetro.

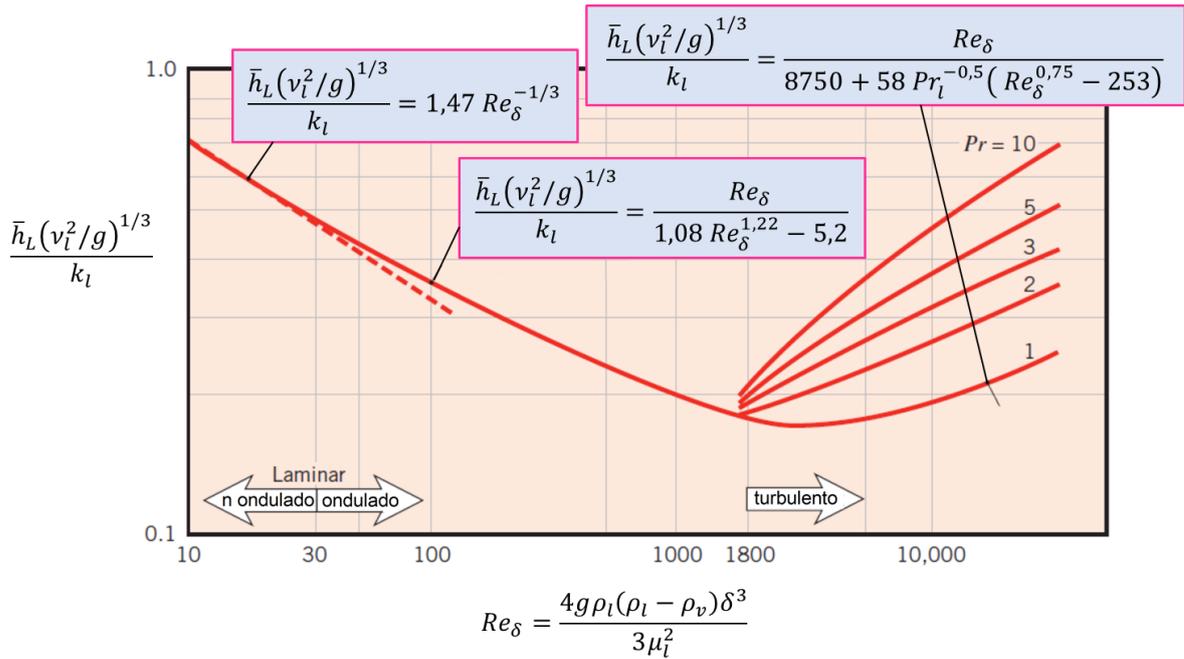


Figura 3.3 – Correlações para cálculo do coeficiente médio de condensação em placas verticais, nos diferentes regimes de escoamento do filme. Adaptado de [1].

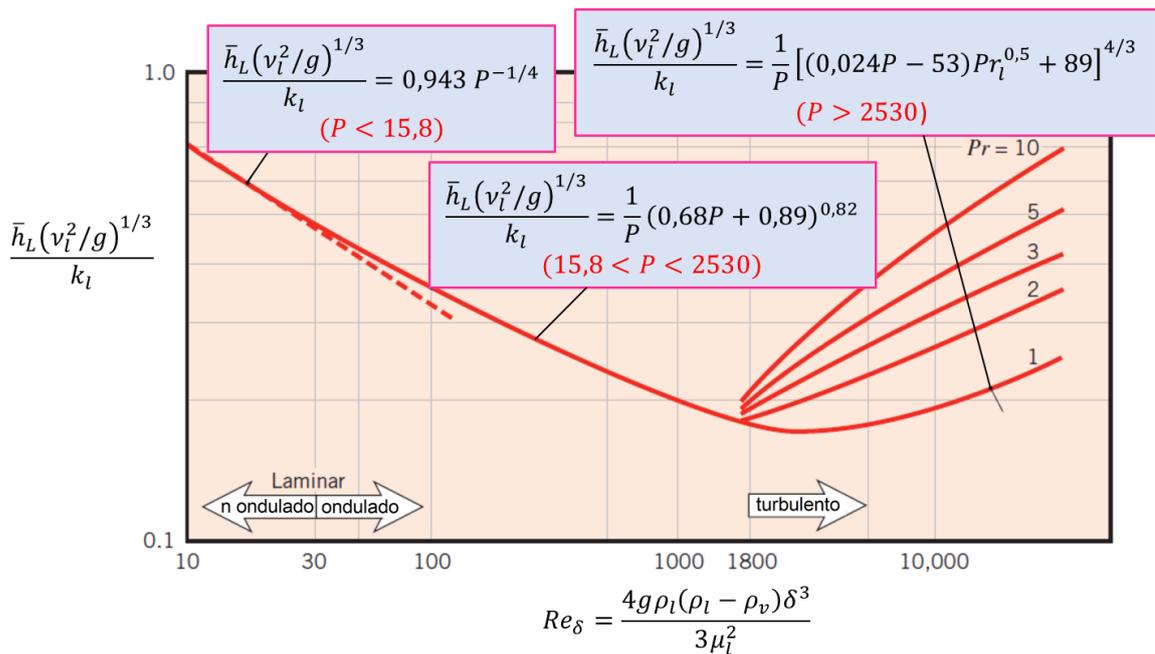


Figura 3.4 – Correlações para cálculo do coeficiente médio de condensação em placas verticais, nos diferentes regimes de escoamento do filme, usando o parâmetro P . Adaptado de [1].

Existem também correlações para outras geometrias. Para uma placa inclinada, fazendo um ângulo $\theta \leq 60^\circ$ com a vertical (com condensação na face superior da placa), é razoável substituir g por $g \cos \theta$, o que no caso laminar se traduz num coeficiente menor, dado por

$$\bar{h}_L = \bar{h}_{L, vertical} (\cos \theta)^{1/4} \tag{3.11}$$

Quanto à condensação no exterior de tubos, há a distinguir tubos horizontais de tubos verticais – Figura 3.5.

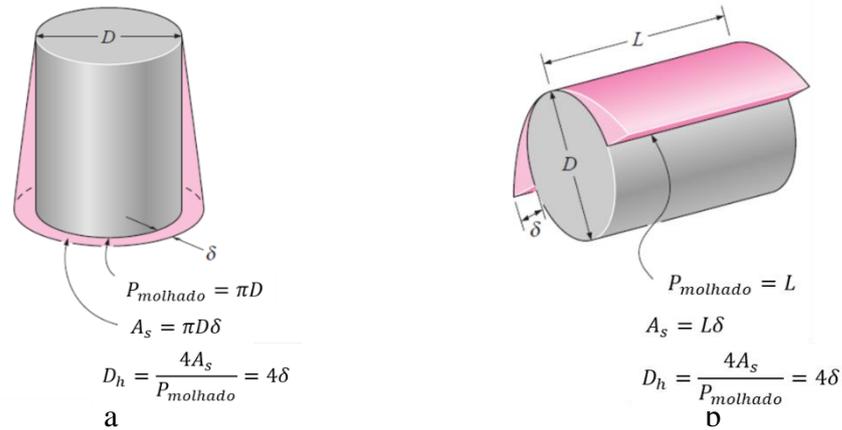


Figura 3.5 – Condensação no exterior de um tubo vertical (a) ou horizontal (b), e respectivos parâmetros.

Nos tubos verticais podem usar-se as equações para placas verticais, desde que o diâmetro do tubo seja muito maior que a espessura do filme, o que acontece quase sempre. Para tubos horizontais isolados de diâmetro D :

$$\bar{h}_D = 0,729 \left[\frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3 \Delta h'_{lv}}{\mu_l (T_{sat} - T_{sup}) D} \right]^{1/4} \quad (3.12)$$

No caso da condensação num conjunto de tubos horizontais – feixe de tubos – o filme de condensado escorre para os tubos situados a nível inferior, o que aumenta a espessura de filme nesses tubos, reduzindo o coeficiente médio – ver Figura 3.6. Pode usar-se a equação (3.12), substituindo D por $N_t D$, em que N_t é o número de tubos alinhados na vertical.

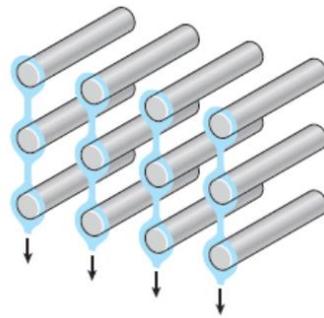


Figura 3.6 – Condensação no exterior de um feixe de tubos.

Para a condensação no exterior de uma esfera de diâmetro D pode usar-se uma correlação semelhante à equação (3.12):

$$\bar{h}_D = 0,826 \left[\frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3 \Delta h'_{lv}}{\mu_l (T_{sat} - T_{sup}) D} \right]^{1/4} \quad (3.13)$$

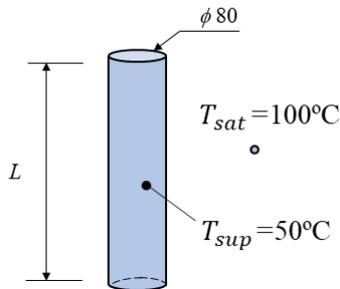
cuja única diferença reside no coeficiente – 0,836 em vez de 0,729.

Note-se que nos cilindros horizontais e esferas não há necessidade de mais que uma correlação, pois atendendo às dimensões típicas não ocorre o regime turbulento.

3.4 Problemas práticos resolvidos (P3.1 a P3.7)

Os problemas que se seguem exemplificam a aplicação das correlações vistas para cálculo da transferência de calor quando há condensação em filme, em diferentes geometrias, fluidos e condições operativas.

P3.1



A superfície exterior de um tubo vertical de 1 m de altura, com um diâmetro de 80 mm, está exposta a vapor de água à pressão atmosférica e é mantida a 50°C através de água de arrefecimento que circula no interior.

Calcule a potência transferida para a água e o caudal de vapor condensado na superfície.

Analise o efeito do comprimento do tubo e a sua colocação na horizontal.

Resolução e discussão

Ao contactar com a superfície exterior do tubo, a temperatura inferior à de saturação, o vapor de água irá condensar, formando um filme de líquido junto à parede, como visto antes.

As propriedades da água necessárias são:

a $T_{sat}=100^\circ\text{C}$: $\rho_v=0,596 \text{ kg/m}^3$, $\Delta h_{lv}=2257 \text{ kJ/kg}$;

a 75°C : $\rho_l=975 \text{ kg/m}^3$, $c_{pl}=4193 \text{ J/kgK}$, $\mu_l=375 \times 10^{-6} \text{ kg/ms}$, $k_l=0,668 \text{ W/mK}$, $\nu_l=385 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$

Podemos admitir que a condensação se passa como numa placa vertical, devido à reduzidíssima espessura do filme, que avaliaremos posteriormente. Para calcular o coeficiente de transferência de calor vamos recorrer às equações para uma placa vertical, usando o parâmetro P da equação (3.10), de modo a facilitar o cálculo:

$$\Delta h'_{lv} = \Delta h_{lv} + 0,68 c_{pl}(T_{sat} - T_{sup}) = 2257 + 0,68 \times 4,193 \times 50 = 2400 \text{ kJ/kg}$$

$$P = \frac{k_l L (T_{sat} - T_{sup})}{\mu_l \Delta h'_{lv} (\nu_l^2 / g)^{1/3}} = \frac{0,668 \times 1 \times (100 - 50)}{375 \times 10^{-6} \times 2400 \times 10^3 \times ((385 \times 10^{-9})^2 / 9,8)^{1/3}} = 1501$$

Recorrendo à Figura 3.4, identificamos o regime de escoamento do líquido como laminar ondulado, sendo o coeficiente:

$$\begin{aligned} \bar{h}_L &= \frac{k_l}{\left(\frac{\nu_l^2}{g}\right)^{1/3}} (0,68P + 0,89)^{0,82} = \frac{0,668}{\left(\frac{(385 \times 10^{-9})^2}{9,8}\right)^{1/3}} (0,68 \times 1501 + 0,89)^{0,82} = \\ &= 5300 \text{ W/m}^2\text{K} \end{aligned}$$

A partir do coeficiente podemos calcular a potência transferida, e depois o caudal condensado:

$$\dot{Q} = \bar{h}_L \pi D L \times (T_{sat} - T_{sup}) = 5300 \times \pi \times 0,08 \times 1 \times (100 - 50) = 66,6 \text{ kW}$$

$$\dot{M}_l = \dot{Q} / \Delta h'_{lv} = 0,0276 \text{ kg/s}$$

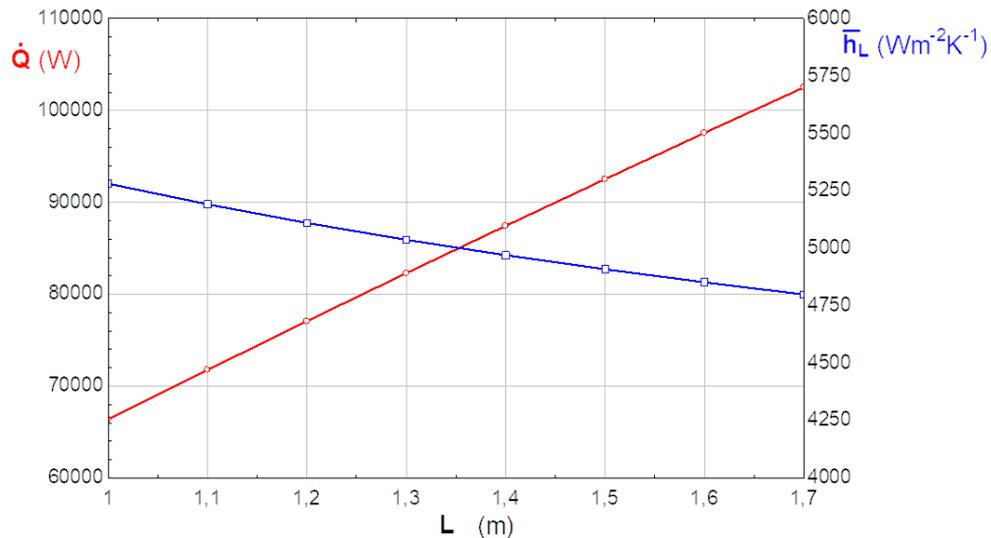
Podemos calcular agora a espessura do filme líquido na extremidade do tubo, usando a equação (3.1) com $\Delta h'_{lv}$. Obtém-se $\delta(L) = 0,218 \text{ mm}$, muito inferior ao diâmetro do tubo, validando a hipótese de considerar a superfície como uma placa vertical.

Também podemos calcular o número de Reynolds do escoamento de condensado, que é

$$Re_{\delta,L} = \frac{4g\rho_l^2\delta(L)^3}{3\mu_l^2} = \frac{4 \times 9,8 \times 975^2 \times (0,218 \times 10^{-3})^3}{3 \times (375 \times 10^{-6})^2} = 915$$

confirmando a existência do regime laminar ondulado na extremidade do tubo.

Vamos agora avaliar o efeito do comprimento do tubo, fazendo-o aumentar desde 1 até 1,7 m. Para tal, podemos usar um valor do parâmetro P que depende linearmente de L , sendo neste caso $P = 1501 L$. Substituindo na equação que dá \bar{h}_L no regime laminar ondulado, e na potência, obtiveram-se os valores representados no gráfico abaixo.



O coeficiente vai diminuindo quando o comprimento de tubo aumenta, uma vez que a espessura do filme líquido vai aumentando, diminuindo o coeficiente médio. No entanto, a potência calorífica aumenta, porque ao aumentar o comprimento aumenta proporcionalmente a área de transferência (esse aumento é maior que a diminuição do coeficiente).

O comprimento $L = 1,7$ m corresponde ao fim do regime laminar ondulado ($P = 2530$), passando a haver regime turbulento. Ao usar esse valor na correlação para regime turbulento, a qual depende do número de Prandtl do líquido (igual a 2,35), obtém-se $\bar{h}_L = 5011$ W/m²K, valor superior ao que se obtém com a correlação para regime laminar ondulado (4806).

Ao surgir a turbulência o coeficiente médio de transferência aumenta. Se o comprimento do tubo for de 2 m o coeficiente passará a ser $\bar{h}_L = 5219$ W/m²K.

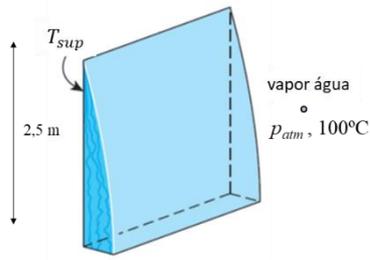
Se o tubo (com $L = 1$ m) for colocado na horizontal, aplicando a equação (3.12):

$$\begin{aligned} \bar{h}_D &= 0,729 \left[\frac{g\rho_l(\rho_l - \rho_v)k_l^3 \Delta h'_{lv}}{\mu_l(T_{sat} - T_{sup})D} \right]^{1/4} = 0,729 \left[\frac{9,8 \times 975 \times (975 - 0,596) \times 0,668^3 \times 2400 \times 10^3}{375 \times 10^{-6} \times (100 - 50) \times 0,08} \right]^{1/4} = \\ &= 5951 \text{ W/m}^2\text{K} \end{aligned}$$

O caudal de condensado será $\dot{M}_l = 0,0312$ kg/s e $Re_{\delta} = 166$ (escoamento laminar do filme).

Assim, é mais vantajoso colocar o tubo horizontalmente. Mesmo com escoamento laminar, a mais reduzida espessura do filme líquido faz com que o coeficiente de transferência seja bastante superior. Por este motivo, os condensadores tubulares, com condensação no exterior dos tubos, usam sempre tubos horizontais.

P3.2



Vapor de água saturado e à pressão atmosférica entra em contacto com uma placa vertical de 2,5 m de altura, que pode ser mantida a diferentes temperaturas, entre 50 e 90°C.

Represente a variação da potência calorífica transferida com a diferença de temperatura entre o vapor e a placa.

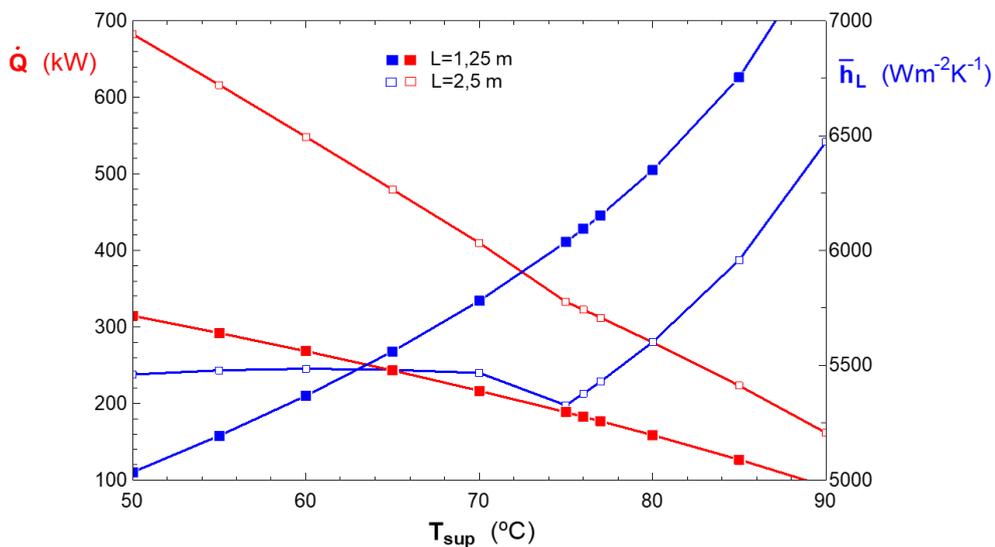
Faça a mesma representação para uma placa com metade da altura.

Resolução e discussão

Temos então condensação em filme numa placa vertical, variando a diferença de temperatura entre o vapor saturado (a 100°C) e a placa. Ao variar essa diferença de temperatura varia o coeficiente médio de transferência, como se vê na equação (3.3) para regime laminar.

Vamos quantificar essa variação, e a da potência transferida, fazendo também variar todas as propriedades físicas relevantes: as propriedades do líquido consideradas à temperatura média (aritmética) entre 100°C e a temperatura da placa, sendo ρ_v e Δh_{lv} consideradas a 100°C; $\Delta h'_{lv}$ variará ligeiramente, por variar T_{sup} .

Assim, foi desenvolvido um programa para repetir o cálculo para várias temperaturas T_{sup} , desde 50 até 90°C, usando o parâmetro P e os limites e equações da Figura 3.4. Os cálculos foram repetidos para uma altura da placa de 2,5 m e 1,25 m. O gráfico seguinte resume os resultados para a potência em função da temperatura da placa.



Para cada uma das alturas a potência diminui quando T_{sup} aumenta (diminui a diferença de temperaturas). Para a altura de 2,5 m verifica-se que o regime se torna turbulento para uma temperatura da placa menor que 76°C; acima de 76°C o regime é laminar ondulado; a transição conduz à descontinuidade nas curvas (corresponde a $P = 2530$), mais notória para o coeficiente. O coeficiente é praticamente constante entre 50 e 70°C, quando existe regime turbulento.

Para a altura de 1,25 m o regime é sempre laminar ondulado, variando P entre 582 e 1843. Assim, não se verificam descontinuidades nas curvas.

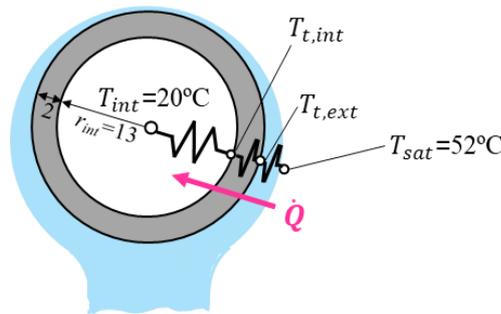
P3.3


O condensador de uma central térmica é composto por vários tubos horizontais. No exterior condensa vapor de água a 0,135 bar, e no interior circula água a uma temperatura média de 20°C. Os tubos são de aço inox ($k=15$ W/mK), com um diâmetro externo de 30 mm e interno de 26 mm. O caudal em cada tubo é de 0,25 kg/s.

Analise o efeito do caudal de água no comportamento do condensador.

Resolução e discussão

Neste problema, em cada tubo do condensador transfere-se calor em regime permanente entre o vapor (no exterior) e a água (no interior). Há condensação em filme no exterior do tubo e convecção forçada no interior, para além da condução na parede do tubo. Assim, poderemos representar o problema esquematicamente como na figura seguinte, recorrendo às resistências térmicas respetivas.



No entanto, devemos notar que a resistência exterior (de condensação) depende do coeficiente respetivo, que por sua vez depende da temperatura da superfície exterior ($T_{t,ext}$), que não é conhecida.

Podemos igualar a potência de condensação à que passa para o interior do tubo (por unidade de comprimento de tubo):

$$\bar{h}_{ext}\pi D_{ext}(T_{sat}-T_{t,ext}) = \frac{T_{t,ext}-T_{int}}{\frac{\ln(D_{ext}/D_{int})}{2\pi k_t} + \frac{1}{\bar{h}_{int}\pi D_{int}}}$$

E, substituindo o coeficiente exterior pela equação (3.12), considerando que não há interação entre tubos:

$$0,729 \left[\frac{g\rho_l(\rho_l-\rho_v)k_l^3\Delta h'_{lv}}{\mu_l(52-T_{t,ext})D_{ext}} \right]^{1/4} \pi D_{ext}(52-T_{t,ext}) = \frac{T_{t,ext}-20}{\frac{\ln(D_{ext}/D_{int})}{2\pi k_t} + \frac{1}{\bar{h}_{int}\pi D_{int}}}$$

equação que, após utilização das propriedades físicas e geométricas, permite calcular $T_{t,ext}$.

As propriedades da água necessárias são:

a 20°C, $p=1$ bar: $\rho_{ág}=998$ kg/m³, $c_{p,ág}=4184$ J/kgK, $\mu_{ág}=0,001$ kg/ms, $k_{ág}=0,598$ W/mK;

a $T_{sat}=52$ °C, $p=0,135$ bar: $\rho_v=0,0904$ kg/m³, $\Delta h'_{lv}=2377$ kJ/kg, $\rho_l=987$ kg/m³, $c_{pl}=4182$ J/kgK, $\mu_l=0,000531$ kg/ms, $k_l=0,645$ W/mK, $\nu_l=5,376\times 10^{-7}$ m²/s

Note-se a utilização de propriedades do líquido saturado à temperatura de saturação, em vez da mais correta média entre essa e a temperatura exterior do tubo, por esta última ser desconhecida - a avaliar. Note-se ainda que na equação acima $\Delta h'_{lv}$ depende também de $T_{t,ext}$.

Quanto à convecção interior, não sendo dado o comprimento do tubo, vamos admitir que ele é muito longo, sendo o coeficiente de convecção médio igual ao da zona desenvolvida, e dado pela equação de Dittus-Boelter (o regime é turbulento). Então obtêm-se:

$$Re_{D,int} = \frac{4\dot{M}_{ág}}{\pi D_{int} \mu_{ág}} = \frac{4 \times 0,25}{\pi \times 0,026 \times 0,001} = 12243$$

$$\bar{h}_{int} = \frac{k_{ág}}{D_{int}} 0,023 Re^{0,8} Pr^{0,4} = \frac{0,598}{0,026} \times 0,023 \times 12243^{0,8} \times 7,00^{0,4} = 2146 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Temos então possibilidade de resolver a equação anterior para cálculo de $T_{t,ext}$:

$$0,729 \left[\frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3 (\Delta h_{lv} + 0,68 c_{pl} (52 - T_{t,ext}))}{\mu_l (52 - T_{t,ext}) D_{ext}} \right]^{1/4} \pi D_{ext} (52 - T_{t,ext}) = \frac{T_{t,ext} - 20}{\frac{\ln(D_{ext}/D_{int})}{2\pi k_t} + \frac{1}{\bar{h}_{int} \pi D_{int}}}$$

que resulta em

$$43,5 \times \left(2377 \times 10^3 + 2844 \times (52 - T_{t,ext}) \right)^{1/4} (52 - T_{t,ext})^{3/4} = 138,44 \times (T_{t,ext} - 20)$$

e com aplicação de um método numérico permite obter:

$$T_{t,ext} = 48,9^\circ\text{C}$$

Substituindo $T_{t,ext}$ em algumas das equações anteriores obtêm-se:

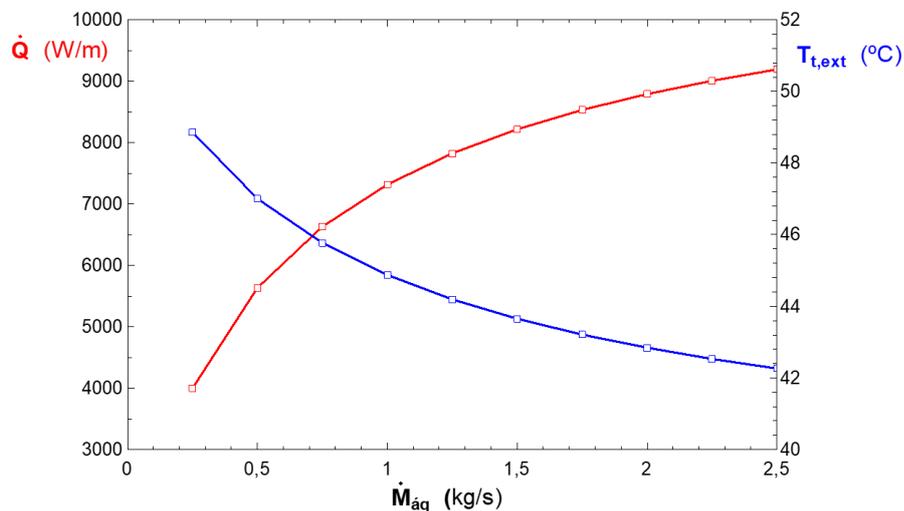
$$\bar{h}_{ext} = 13673 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$\dot{Q} = 3995 \text{ W/m}$$

$$\dot{M}_l = \dot{Q} / \Delta h'_{lv} = 0,00167 \text{ kg/s/m}$$

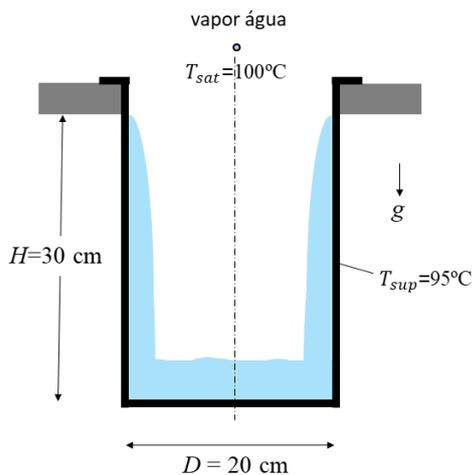
O coeficiente de condensação é bastante elevado, pelo que a temperatura exterior do tubo está próxima da de saturação do vapor. Assim, o erro nas propriedades do condensado (que não foram tomadas à temperatura média) é baixo. Note-se que a resistência térmica dominante é a de convecção interior, pelo que atuar na sua redução tem bastante impacto.

Nesse sentido, avaliamos de seguida o efeito do aumento do caudal de água no interior do tubo, fazendo-o variar entre 0,25 kg/s ($v_m = 0,47$ m/s, situação anterior) e 2,5 kg/s ($v_m = 4,7$ m/s). Fazendo variar também as propriedades do condensado, usando a temperatura média, obtiveram-se os valores do gráfico seguinte.



O aumento do caudal de 0,25 kg/s para 1,5 kg/s praticamente duplica a potência transferida. A temperatura da superfície diminui com o aumento do caudal de água, reduzindo cerca de 5°C para um caudal de 1,5 kg/s. A partir deste valor de caudal ($v_m = 2,8$ m/s) as variações são menos acentuadas – diminui o impacto do aumento do caudal de água.

P3.4



Vapor de água saturado à pressão atmosférica, proveniente de um processo químico, condensa na superfície interior de um recipiente cilíndrico.

O recipiente, com a parede interior a 95°C, mantida constante através de um banho de água no exterior, tem uma altura de 30 cm e um diâmetro de 20 cm.

Determine ao fim de quanto tempo fica o recipiente cheio de água. Considere que ocorre condensação em filme, em regime laminar não ondulado.

Resolução e discussão

Trata-se de um problema em que a massa de água contida vai aumentando ao longo do tempo, e portanto instacionário. Mas podemos relacionar a variação da massa de água com a água que condensa, devido à transferência de calor para a parede interior (mais fria).

As propriedades da água necessárias são:

a $T_{sat}=100^\circ\text{C}$: $\rho_v=0,596 \text{ kg/m}^3$, $\Delta h_{lv}=2257 \text{ kJ/kg}$;

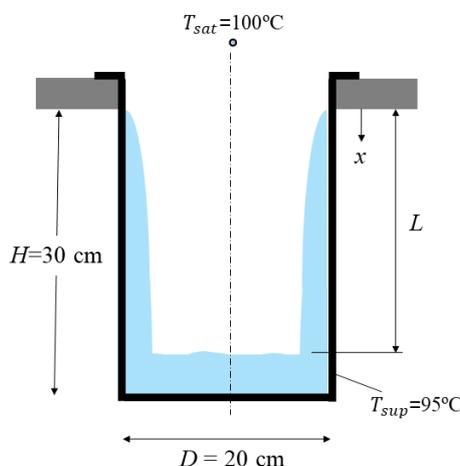
a $97,5^\circ\text{C}$: $\rho_l=960 \text{ kg/m}^3$, $c_{pl}=4213 \text{ J/kgK}$, $\mu_l=289 \times 10^{-6} \text{ kg/ms}$, $k_l=0,676 \text{ W/mK}$.

Então, o balanço mássico de água dirá que, em cada instante, a variação da massa de água contida no recipiente é igual ao caudal que nesse instante condensa:

$$\frac{dM_{\acute{a}g}}{dt} = \dot{M}_l$$

Para expressar a massa de água contida vamos considerar a água acumulada no fundo do recipiente, desprezando a que está contida no filme que escorre junto à parede. Assim, recorrendo à altura L da figura abaixo – altura sem água – podemos escrever

$$\frac{dM_{\acute{a}g}}{dt} = \rho_l \frac{\pi D^2}{4} \frac{d(H-L)}{dt} = -\rho_l \frac{\pi D^2}{4} \frac{dL}{dt}$$



O sinal negativo traduz que quando L diminui a massa contida aumenta. Quanto ao caudal que condensa, vamos admitir que se trata de uma placa vertical (desprezando a curvatura), e recorrer à relação com o coeficiente de transferência de calor e respetivas temperaturas:

$$\dot{M}_l = \dot{Q} / \Delta h'_{lv} = \frac{\bar{h}_L \pi D L}{\Delta h'_{lv}} (T_{sat} - T_{sup}) = 0,943 \left[\frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3 \Delta h'_{lv}}{\mu_l (T_{sat} - T_{sup}) L} \right]^{1/4} \frac{\pi D L}{\Delta h'_{lv}} (T_{sat} - T_{sup})$$

admitindo, como indicado, que a condensação se dá em regime laminar não ondulado (\bar{h}_L dado pela equação (3.3)), e lembrando que

$$\Delta h'_{lv} = \Delta h_{lv} + 0,68 c_{pl} (100 - 95) = 2271 \text{ kJ/kg}$$

O caudal condensado varia então com o comprimento L , e reproduzindo o balanço mássico temos:

$$-\rho_l \frac{\pi D^2}{4} \frac{dL}{dt} = 0,943 \left[\frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3 \Delta h'_{lv}}{\mu_l (T_{sat} - T_{sup}) L} \right]^{1/4} \frac{\pi D L}{\Delta h'_{lv}} (T_{sat} - T_{sup})$$

ou

$$\frac{dL}{dt} = - \frac{4 \times 0,943 \times g^{1/4} k_l^{3/4}}{\rho_l^{0,5} \Delta h'_{lv}{}^{3/4} \mu_l^{1/4} D} (T_{sat} - T_{sup})^{3/4} L^{3/4}$$

Utilizando as propriedades e temperaturas em causa, obtém-se

$$\frac{dL}{dt} = -3,520 \times 10^{-4} L^{3/4}$$

equação que pode ser integrada, sujeita à condição inicial $L(t = 0) = H$, resultando em

$$L^{1/4} = H^{1/4} - 8,800 \times 10^{-5} t$$

Quando o recipiente ficar cheio $L=0$, sendo

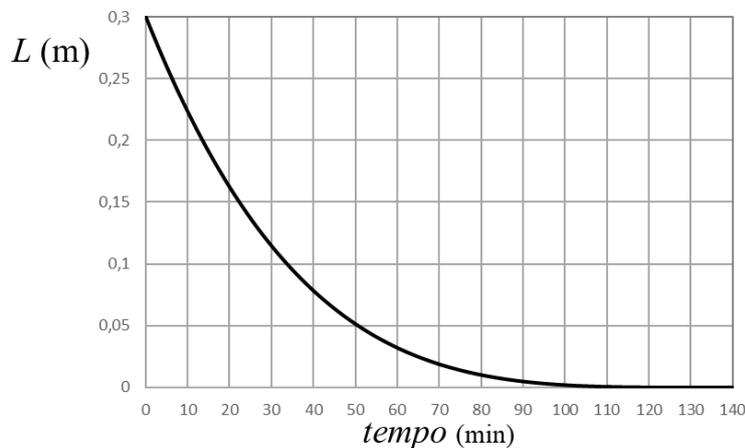
$$t = 8410 \text{ s} = 140 \text{ min} = 2,34 \text{ horas}$$

Verifiquemos a hipótese considerada de condensação em regime laminar não ondulado. Para isso, vamos calcular o parâmetro P quando $L = 0,3 \text{ m}$, ou seja, no início do processo:

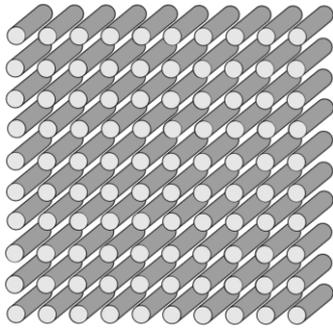
$$P = \frac{k_l L (T_{sat} - T_{sup})}{\mu_l \Delta h'_{lv} (v_l^2 / g)^{1/3}} = \frac{0,668 \times 0,3 \times (100 - 95)}{375 \times 10^{-6} \times 2271 \times 10^3 \times ((385 \times 10^{-9})^2 / 9,8)^{1/3}} = 47,4 > 15,8$$

Nesta altura o valor de P é ligeiramente superior ao limite, embora reduza ao longo do tempo. O erro cometido não é muito significativo (ver Figura 3.4).

O gráfico seguinte representa a evolução temporal de L . Como é patente, o recipiente fica praticamente cheio (pelo menos 90%) ao fim de 60 minutos.



P3.5



Num permutador de calor condensa-se vapor de água a 0,1 bar no exterior de um feixe de 100 tubos dispostos num arranjo quadrado (tubos alinhados). Os tubos têm um diâmetro exterior de 8 mm e a superfície é mantida à temperatura média de 30°C, através de água que circula no seu interior.

Sem alterar o número total de tubos ou o seu diâmetro, nem a temperatura superficial, analise o efeito de diferentes arranjos dos tubos.

Resolução e discussão

Neste problema existe condensação no exterior de um feixe de tubos, geometria para a qual se pode aplicar a correlação (3.12) para cálculo do coeficiente de transferência, introduzindo o número de tubos alinhados na vertical (N_t).

A temperatura de saturação do vapor, a 0,1 bar, é de aproximadamente 46°C, sendo as propriedades relevantes da água:

a $T_{sat}=46^\circ\text{C}$: $\rho_v=0,067 \text{ kg/m}^3$, $\Delta h'_{lv}=2393 \text{ kJ/kg}$;

a 38°C : $\rho_l=993 \text{ kg/m}^3$, $c_{pl}=4178 \text{ J/kgK}$, $\mu_l=703 \times 10^{-6} \text{ kg/ms}$, $k_l=0,627 \text{ W/mK}$.

Então, na configuração inicial (10 x 10 tubos alinhados) o coeficiente médio de condensação será, com 10 tubos alinhados na vertical:

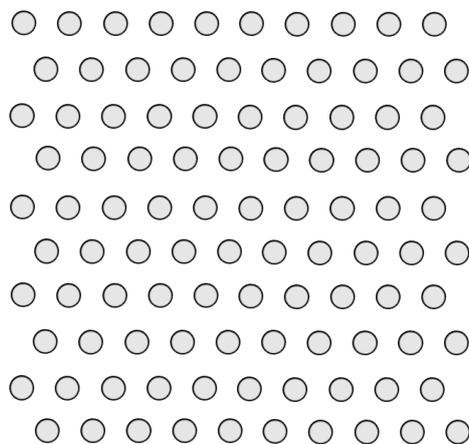
$$\begin{aligned} \bar{h}_D &= 0,729 \left[\frac{g\rho_l(\rho_l-\rho_v)k_l^3\Delta h'_{lv}}{\mu_l(T_{sat}-T_{sup})N_tD} \right]^{1/4} = 0,729 \left[\frac{9,8 \times 993 \times (993-0,067) \times 0,627^3 \times 2438 \times 10^3}{703 \times 10^{-6} \times (46-30) \times 10 \times 0,008} \right]^{1/4} = \\ &= 6534 \text{ W/m}^2\text{K} \end{aligned}$$

A potência transferida e o caudal condensado, por metro de comprimento dos tubos, serão:

$$\dot{Q} = \bar{h}_D A (T_{sat} - T_{sup}) = 6534 \times 100 \times \pi \times 0,008 \times (46 - 30) = 262,7 \text{ kW/m}$$

$$\dot{M}_l = \dot{Q} / \Delta h'_{lv} = 0,108 \text{ kg/s/m}$$

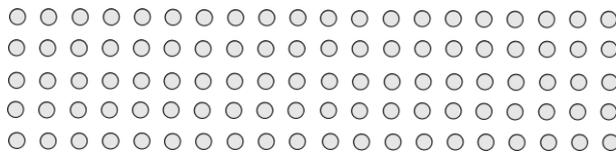
Consideremos agora diferentes arranjos dos tubos, começando por desalinhar os tubos (10 x 10 tubos desalinhados), como esquematiza a figura:



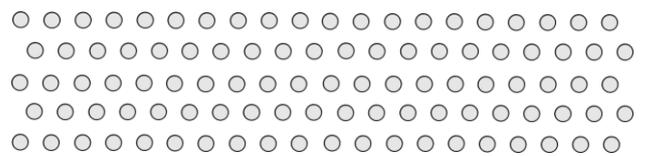
Neste arranjo existem sempre 5 tubos na mesma linha vertical, passando o coeficiente médio de condensação a ser de 7770 W/m²K e a potência de 312,4 kW/m.

Outras configurações possíveis, mantendo os mesmos 100 tubos são:

20 x 5 tubos alinhados:



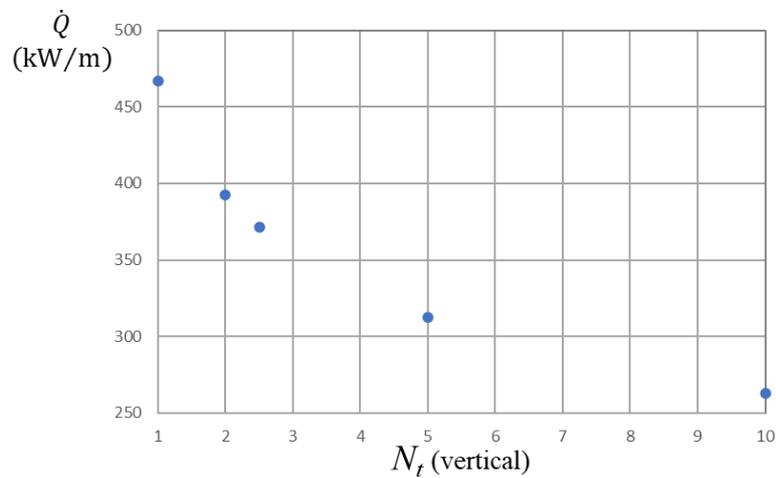
20 x 5 tubos desalinhados:



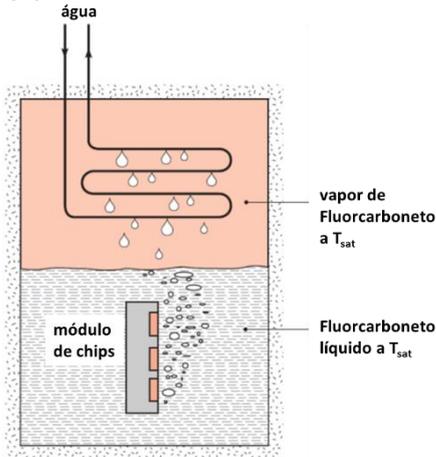
Note-se que ter 20 x 5 tubos alinhados ou 10 x 10 tubos desalinhados conduz aos mesmos resultados, já que existem nos 2 casos 5 tubos na mesma linha vertical. Com 20 x 5 tubos desalinhados o número médio de tubos na vertical a usar na equação é de 2,5.

Pode ainda reduzir-se mais o número de tubos na mesma linha vertical, usando 50 x 2 tubos (2 na vertical), de preferência desalinhados (equivalendo a 100 x 1). No entanto, a dimensão horizontal aumenta proporcionalmente ao número de tubos na horizontal, o que pode levantar problemas de espaço.

O gráfico seguinte representa os resultados (potência calorífica) dos vários arranjos.



P3.6



Para arrefecer módulos eletrónicos é usual colocá-los num banho de fluorcarboneto líquido saturado. O calor libertado pelo módulo para o líquido provoca a ebulição deste, e o vapor gerado condensa depois ao contactar com a superfície exterior de um tubo mais frio, onde circula água.

Considere um tubo horizontal reto (sem curvas) de espessura desprezável e 10 mm de diâmetro, em que a água entra a 12°C e sai a 42°C. O fluxo de calor no módulo é de 10^5 W/m^2 , numa área de 100 mm x 100 mm. A temperatura de saturação do fluorcarboneto é de 57°C.

As propriedades relevantes do fluorcarboneto são:

a $T_{sat}=57^\circ\text{C}$: $\rho_v=13,4 \text{ kg/m}^3$, $\Delta h'_{lv} \approx \Delta h_{lv}=84400 \text{ J/kg}$;

líquido: $\rho_l=1619 \text{ kg/m}^3$, $c_{pl}=1100 \text{ J/kgK}$, $\mu_l=440 \times 10^{-6} \text{ kg/ms}$, $k_l=0,0537 \text{ W/mK}$.

Calcule o caudal de água e o comprimento de tubo necessários.

Resolução e discussão

Neste caso sabemos a potência que o tubo (e a água) têm de retirar, que tem de ser transferida por condensação do fluorcarboneto no tubo horizontal.

Começemos por calcular o respetivo valor:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{mód} = (\dot{q}A)_{mód} = 10^5 \times 0,1 \times 0,1 = 1000 \text{ W}$$

Sabendo o aumento de temperatura da água no tubo, é fácil calcular o caudal necessário:

$$\dot{M}_{ág} = \frac{\dot{Q}}{c_{p,ág}(T_{sai}-T_{ent})} = \frac{1000}{4179 \times (42-12)} = 0,00798 \text{ kg/s}$$

As propriedades a usar para a água são tomadas a 27°C (média aritmética entre a entrada e a saída): $\rho_{ág}=997 \text{ kg/m}^3$, $c_{p,ág}=4179 \text{ J/kgK}$, $\mu_{ág}=855 \times 10^{-6} \text{ kg/ms}$, $k_{ág}=0,613 \text{ W/mK}$.

A potência transferida por condensação, já calculada, pode relacionar-se com o coeficiente de condensação e a diferença de temperaturas. Vamos considerar o tubo a uma temperatura média (\bar{T}_t), podendo então escrever para a potência de condensação

$$\bar{h}_{D,ext} \pi D_t L_t (T_{sat} - \bar{T}_t) = 0,729 \left[\frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3 \Delta h'_{lv}}{\mu_l (T_{sat} - \bar{T}_t) D_t} \right]^{1/4} \pi D_t L_t (T_{sat} - \bar{T}_t) = 1000 \text{ W}$$

Para a evolução de temperatura da água, entre a entrada e a saída, e a sua relação com a temperatura média do tubo, podemos recorrer a uma equação já vista na convecção forçada (2.26):

$$\frac{(\bar{T}_t - T_{ág,sai})}{(\bar{T}_t - T_{ág,ent})} = \exp \left(- \frac{\bar{h}_{ág} \pi D_t L_t}{\dot{M}_{ág} c_{p,ág}} \right)$$

Definimos então um sistema de equações que permite calcular \bar{T}_t e L_t , desde que o coeficiente médio de convecção tubo-água (interior) seja conhecido. Para calcular este coeficiente vamos avaliar o regime de escoamento:

$$Re_{ág} = \frac{4 \dot{M}_{ág}}{\pi D_t \mu_{ág}} = \frac{4 \times 0,00798}{\pi \times 0,01 \times 855 \times 10^{-6}} = 1188$$

Sendo o regime laminar, e considerando a parede do tubo a uma temperatura média constante, o número de Nusselt para escoamento desenvolvido é igual a 3,66 (Tabela 2.3). Como não sabemos o comprimento do tubo, vamos admitir que ele é tão longo que o coeficiente de convecção médio é igual ao da zona desenvolvida, o que verificaremos posteriormente. Então, vem:

$$\bar{h}_{\dot{a}g} = \frac{Nu k_{\dot{a}g}}{D_t} = \frac{3,66 \times 0,613}{0,01} = 224 \text{ W/m}^2\text{K}$$

Podemos então concretizar o sistema de 2 equações encontrado:

$$\begin{cases} 0,729 \left[\frac{9,8 \times 1619 \times (1619 - 13,4) \times 0,0537^3 \times 844400}{440 \times 10^{-6} \times (57 - \bar{T}_t) \times 0,010} \right]^{1/4} \times \pi \times 0,01 \times L_t \times (57 - \bar{T}_t) = 1000 \\ \frac{\bar{T}_t - 42}{\bar{T}_t - 12} = \exp \left(- \frac{224 \times \pi \times 0,010 \times L_t}{0,00798 \times 4179} \right) \end{cases}$$

sistema não linear a resolver por método iterativo, que conduz a

$$\begin{cases} \bar{T}_t = 53,7^\circ\text{C} \\ L_t = 6,0 \text{ m} \end{cases}$$

Vamos agora verificar a hipótese de escoamento desenvolvido no interior do tubo. Em regime laminar, admitindo o perfil de velocidades desenvolvido desde o início e o perfil térmico em desenvolvimento, pela equação (2.21) ter-se-á um valor médio de Nusselt:

$$\overline{Nu}_{\dot{a}g} = 3,66 + \frac{0,0668 Re_{\dot{a}g} Pr_{\dot{a}g} D_t / L_t}{1 + 0,04 (Re_{\dot{a}g} Pr_{\dot{a}g} D_t / L_t)^{2/3}} = 3,66 + \frac{0,0668 \times 1188 \times 5,83 \times 0,01/6}{1 + 0,04 \times (1188 \times 5,83 \times 0,01/6)^{2/3}} = 4,30$$

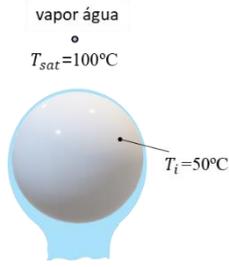
que representa um aumento de 17% no coeficiente, que virá $\bar{h}_{\dot{a}g} = 264 \text{ W/m}^2\text{K}$.

Uma nova iteração de cálculo, usando este valor do coeficiente no sistema de equações anterior, conduz a:

$$\begin{cases} \bar{T}_t = 53,0^\circ\text{C} \\ L_t = 5,3 \text{ m} \end{cases}$$

Note-se que se aumentássemos o caudal de água de modo a ter regime de escoamento turbulento, conseguiríamos reduzir significativamente o comprimento de tubo necessário, uma vez que a resistência de convecção no interior do tubo é bastante maior que a resistência de condensação no exterior (usando os valores da última iteração: $\bar{h}_{\dot{a}g} = 264$; $\bar{h}_{D,ext} = 1501 \text{ W/m}^2\text{K}$). Um caudal 10 vezes maior ($0,0798 \text{ kg/s}$, a que corresponde uma velocidade média de 1 m/s) permite regime turbulento, conseguindo-se, mesmo sem contabilizar o comprimento de entrada (que neste caso será pouco importante), $\bar{h}_{\dot{a}g} = 5192 \text{ W/m}^2\text{K}$. Com esse coeficiente obtém-se $\bar{T}_t = 19,8^\circ\text{C}$, e consegue-se um comprimento $L_t = 0,98 \text{ m}$. Nesse caso a água sairá a 15°C e $\bar{h}_{D,ext} = 874 \text{ W/m}^2\text{K}$, passando a condensação a oferecer a maior resistência térmica, devido à redução da temperatura média do tubo (há mais condensado).

P3.7



Uma esfera de alumínio com um diâmetro de 10 cm, inicialmente a 50°C, é colocada num ambiente de vapor saturado a 1 atm. Estime o tempo necessário a que a esfera atinja o equilíbrio térmico, e calcule a massa de condensado formado durante esse período de tempo.

As propriedades relevantes do alumínio são: $\rho=2702 \text{ kg/m}^3$, $c_p=903 \text{ J/kgK}$, $k=237 \text{ W/m}^\circ\text{C}$.

Resolução e discussão

Neste caso a esfera vai variar a sua temperatura ao longo do tempo, ou seja, trata-se de um problema em regime instacionário. Para quantificação da transferência por condensação na superfície da esfera vamos admitir que em cada instante se atinge o regime permanente (quase estacionário).

Quanto à variação da temperatura no interior da esfera, quando comparada com a exterior, vamos admitir que é desprezável, ou seja, vamos admitir a esfera como um sistema global, a temperatura uniforme em cada instante. Esta hipótese será avaliada posteriormente, quando calcularmos os coeficientes de condensação, que variam no tempo.

Para as propriedades da água vamos considerar valores constantes:

a $T_{sat}=100^\circ\text{C}$: $\rho_v=0,596 \text{ kg/m}^3$, $\Delta h_{lv}=2257 \text{ kJ/kg}$;

líquido a $87,5^\circ\text{C}$: $\rho_l=967 \text{ kg/m}^3$, $c_{pl}=4203 \text{ J/kgK}$, $\mu_l=324 \times 10^{-6} \text{ kg/ms}$, $k_l=0,672 \text{ W/mK}$.

Para o líquido (condensado) foi considerada a temperatura média (aritmética) entre 75°C (início) e 100°C (fim). Quanto a $\Delta h'_{lv} = \Delta h_{lv} + 0,68 c_{pl}(100 - 87,5) = 2293 \text{ kJ/kg}$

Então, um balanço ao sistema global (esfera à temperatura T) traduz-se por:

$$\rho_{alum} c_{p,alum} \frac{4\pi(D/2)^3}{3} \frac{dT}{dt} = \bar{h}_{D,ext} 4\pi(D/2)^2 (T_{sat} - T)$$

com $\bar{h}_{D,ext}$ dado pela equação (3.13), vindo

$$\rho_{alum} c_{p,alum} \frac{4\pi(D/2)^3}{3} \frac{dT}{dt} = 0,826 \left[\frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3 \Delta h'_{lv}}{\mu_l (T_{sat} - T) D} \right]^{1/4} 4\pi(D/2)^2 (T_{sat} - T)$$

ou

$$\frac{dT}{(T_{sat} - T)^{3/4}} = \frac{6}{\rho_{alum} c_{p,alum} D} \times 0,826 \left[\frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3 \Delta h'_{lv}}{\mu_l D} \right]^{1/4} dt$$

ou, substituindo as propriedades e o diâmetro:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{(100 - T)^{3/4}} &= \frac{6}{2702 \times 903 \times 0,1} \times 0,826 \left[\frac{9,8 \times 967 \times (967 - 0,596) \times 0,672^3 \times 2293 \times 10^3}{324 \times 10^{-6} \times 0,1} \right]^{1/4} dt = \\ &= 0,4279 dt \end{aligned}$$

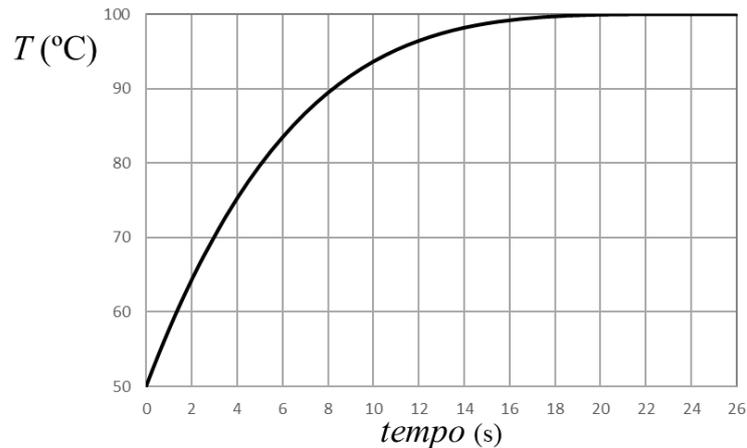
A integração desta equação, sujeita à condição $T|_{t=0} = 50^\circ\text{C}$, é

$$(100 - T)^{1/4} = 50^{1/4} - 0,1070 t$$

A esfera atinge $T = 100^\circ\text{C}$, quando

$$t = 24,9 \text{ s}$$

O gráfico seguinte representa a rápida evolução da temperatura da esfera. Ela é rápida devido às propriedades da esfera e elevados coeficientes de transferência (condensação).



Vamos avaliar a hipótese de sistema global, através do cálculo do número de Biot. No início ($T=50^{\circ}\text{C}$) o coeficiente de condensação é igual a

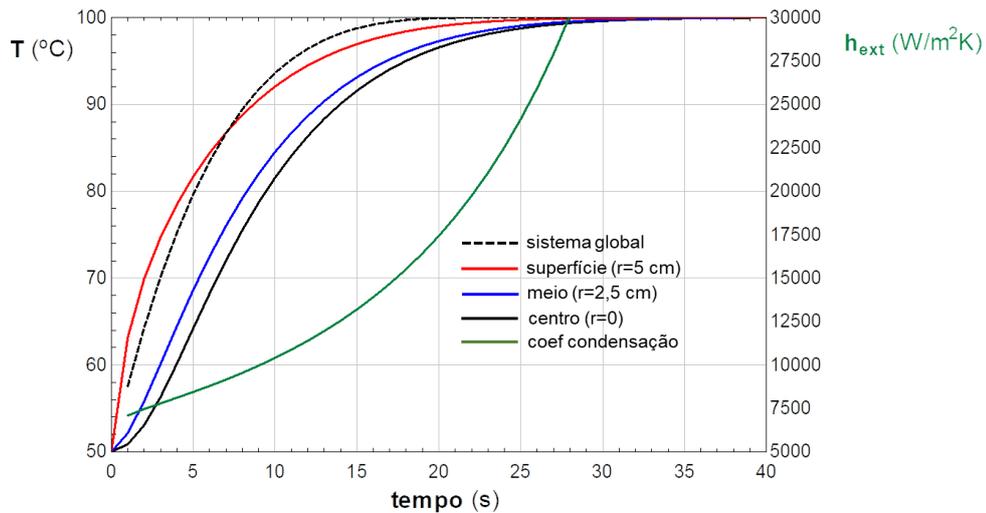
$$\begin{aligned} \bar{h}_{D,ext} &= 0,826 \left[\frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3 \Delta h'_{lv}}{\mu_l (T_{sat} - T) D} \right]^{1/4} = \\ &= 0,826 \left[\frac{9,8 \times 967 \times (967 - 0,596) \times 0,672^3 \times 2293 \times 10^3}{324 \times 10^{-6} \times (100 - 50) \times 0,1} \right]^{1/4} = 6542 \text{ W/m}^2\text{K} \end{aligned}$$

O número de Biot nessa altura será

$$Bi = \frac{\bar{h}_{D,ext} L_c}{k_{alum}} = \frac{\bar{h}_{D,ext} (D/6)}{k_{alum}} = \frac{6542 \times (0,1/6)}{237} = 0,46$$

ou seja, superior ao limite de 0,1 definido na secção 1.2.1. E o Bi irá aumentar ainda mais ao longo do tempo, porque a diferença de temperatura (vapor-esfera) vai diminuir e o coeficiente vai aumentar. Assim, a hipótese de sistema global não é válida, permitindo apenas uma aproximação grosseira. A esfera demorará mais tempo a atingir os 100°C , em particular no centro. Mas o método de cálculo 1D instacionário visto em 1.2.2 também não é aplicável, pois não é válido com coeficientes de transferência variáveis no tempo.

Para obter uma evolução de temperaturas mais próxima da realidade, foi aplicado um método numérico 1D (de volumes finitos), dividindo a esfera em elementos de volume (casca esféricas), que se traduziu na definição de 11 nodos igualmente espaçados (5 mm) ao longo do raio da esfera (de 50 mm). Foi usado um passo de integração no tempo de 1 segundo. O cálculo ao longo do tempo traduz-se no gráfico seguinte, que apresenta as temperaturas no centro, a meio e na superfície da esfera, e a sua comparação com o resultado do método do sistema global. O mesmo gráfico mostra a evolução do coeficiente de condensação. Note-se que enquanto com o sistema global a esfera demora cerca de 25 s a atingir o equilíbrio, com o método numérico 1D (condução radial) demora cerca de 35 s, um tempo superior. Chega a existir uma diferença de cerca de 10°C entre o centro e a superfície da esfera. Quanto ao coeficiente de condensação, aumenta muito rapidamente até valores da ordem das dezenas de milhar, o que reforça o afastamento da situação de sistema global.



Vamos agora estimar a massa de água condensada até se atingirem os 100°C, a partir do cálculo da energia total recebida pela esfera. Esta é

$$Q_{alum} = \rho_{alum} c_{p,alum} \frac{4\pi(D/2)^3}{3} (T_{final} - T_i) = 2702 \times 903 \times \frac{4\pi(0,1/2)^3}{3} (100 - 50) = 63877 \text{ J}$$

e é a mesma que o vapor perdeu ao condensar, pelo que

$$M_l = \frac{Q_{alum}}{\Delta h'_{lv}} = \frac{63877}{2293 \times 10^3} = 0,028 \text{ kg} = 28 \text{ g}$$

Note-se que este cálculo da massa condensada não é afetado pela consideração ou não de sistema global na esfera, uma vez que só depende das temperaturas inicial e final.

4 Ebulição em reservatório

Tal como na condensação, na ebulição existe mudança de fase. Neste caso a mudança inversa, ou seja, a passagem de líquido a vapor junto a uma interface sólido-líquido. Estando envolvido o calor latente de vaporização, os coeficientes de transferência são também usualmente elevados, quando comparados com os de convecção forçada.

Trataremos apenas a ebulição em reservatório, que ocorre quando o fluido se encontra contido num recipiente (em repouso). Nesse caso, os movimentos do fluido são provocados pela diferença de densidades das fases em presença, como acontece na convecção natural (nesse caso apenas com uma fase). A ebulição em escoamento, que encontra o seu paralelo na convecção forçada (esta sem mudança de fase), não será abordada neste texto.

4.1 Ebulição saturada e subarrefecida

Para ocorrer ebulição o fluido tem de estar em contacto com uma superfície a uma temperatura superior à temperatura de saturação ou ebulição para a pressão a que se encontra. Se o fluido estiver a uma temperatura inferior à de saturação dizemos que se trata de ebulição subarrefecida ou local. Se estiver a uma temperatura igual à de saturação temos ebulição saturada ou global. A Figura 4.1 ilustra os dois casos. Durante a ebulição saturada a temperatura do fluido mantém-se inalterada, transferindo-se calor latente (de vaporização). E a diferença de densidades entre as 2 fases gera uma força de impulsão adicional, em relação à convecção natural.

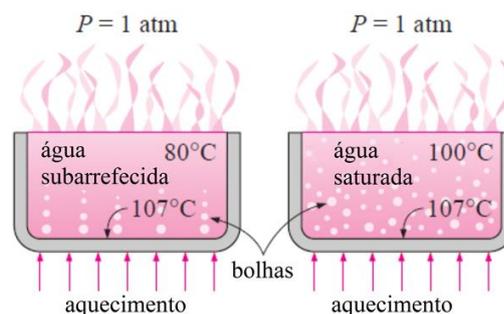


Figura 4.1 – Ilustração da ebulição em reservatório subarrefecida e saturada, para a água à pressão atmosférica.

Iremos tratar sobretudo a ebulição saturada. Depois veremos como estimar a transferência de calor no caso da ebulição subarrefecida.

É de assinalar que a quantificação da transferência de calor quando há ebulição se faz por correlações empíricas, e não utilizando a metodologia adimensional vista na convecção. Assim, as correlações existentes, baseadas na experimentação, em vez de expressarem o número de Nusselt, expressam diretamente o fluxo de calor, ou o coeficiente de transferência de calor.

4.2 Regimes de ebulição e correlações respectivas

De acordo com a diferença de temperatura entre a superfície (mais quente) e o líquido (saturado), podem verificar-se diferentes regimes de ebulição. A Figura 4.2 representa esses regimes, para o caso da água à pressão atmosférica. Curvas semelhantes podem ser obtidas para pressões diferentes, e fluidos diferentes.

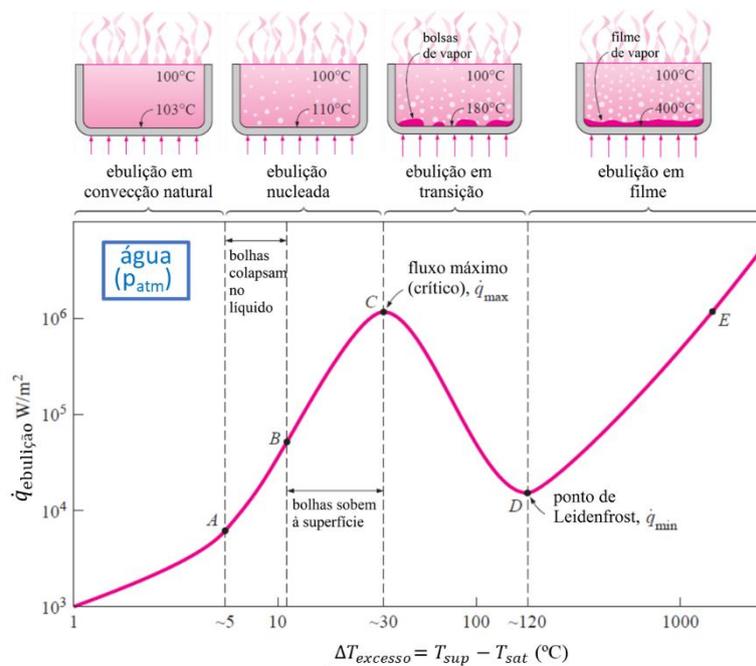


Figura 4.2 – Regimes de ebulição saturada em reservatório. Valores para a água a p_{atm} . Adaptado de [2].

Para baixas diferenças de temperatura (até cerca de 5°C no caso da água a p_{atm}), ou seja até ao ponto A representado na Figura 4.2, não se observam bolhas de vapor, havendo convecção natural, com o movimento ascendente do líquido junto à superfície mais quente. Pode calcular-se o coeficiente de transferência, e o fluxo de calor respetivo, utilizando as equações vistas na convecção natural (em 2.4), sendo o coeficiente proporcional a $\Delta T^{1/4}$ ou $\Delta T^{1/3}$, consoante a geometria e regime.

Para diferenças de temperatura maiores, observa-se a formação de bolhas de vapor junto à superfície mais quente, que se libertam e sobem no líquido. Até ao ponto B da Figura 4.2 (correspondente a $\Delta T \cong 10^\circ\text{C}$ no caso da água a p_{atm}), as bolhas colapsam no líquido antes de atingirem a superfície. Para valores maiores e até ao ponto C da Figura 4.2 ($\Delta T \cong 30^\circ\text{C}$ no caso da água a p_{atm}) as bolhas sobem até à superfície, havendo libertação do vapor para o ar exterior. Ambas as zonas (AB e BC) correspondem ao regime dito de ebulição nucleada. Neste regime, a correlação mais usada para cálculo do fluxo de calor é a equação de Rohsenow:

$$\dot{q} = \mu_l \Delta h_{lv} \left[\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma} \right]^{1/2} \left[\frac{c_{p,l}(T_{sup} - T_{sat})}{C_{sf} \Delta h_{lv} Pr_l^n} \right]^3 \quad (4.1)$$

em que intervêm várias propriedades do líquido (a tomar a T_{sat}), o calor latente de vaporização, a massa específica do vapor e a tensão superficial, σ . Aparecem também 2 coeficientes empíricos: C_{sf} e o expoente n . Estes coeficientes dependem da combinação sólido-fluido, e do acabamento superficial do sólido – ver Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Valores de C_{sf} para várias combinações sólido-fluido.

combinação fluido - superfície	C_{sf}	n
água - cobre (polido)	0.0130	1.0
água - cobre (marcado)	0.0068	1.0
água - aço inox (polido mecânicamente)	0.0130	1.0
água - aço inox (polimento de precisão)	0.0060	1.0
água - aço inox (revestido a teflon)	0.0058	1.0
água - aço inox (polimento químico)	0.0130	1.0
água - latão	0.0060	1.0
água - níquel	0.0060	1.0
água - platina	0.0130	1.0
n-pentano - cobre (polido)	0.0154	1.7
n-pentano - crómio	0.0150	1.7
benzeno - crómio	0.1010	1.7
etanol - crómio	0.0027	1.7
tetracloroto de carbono - cobre	0.0130	1.7
isopropanol - cobre	0.0025	1.7

Tabela 4.2 – Tensão superficial (σ) na interface sólido-líquido para a água.

$T, ^\circ\text{C}$	$\sigma, \text{N/m}$
0	0.0757
20	0.0727
40	0.0696
60	0.0662
80	0.0627
100	0.0589
120	0.0550
140	0.0509
160	0.0466
180	0.0422
200	0.0377
220	0.0331
240	0.0284
260	0.0237
280	0.0190
300	0.0144
320	0.0099
340	0.0056
360	0.0019
374	0.0

Os valores da Tabela 4.1 podem usar-se para qualquer geometria, pois verificou-se que o fluxo de calor na ebulição nucleada é independente da geometria e orientação da superfície quente. A Tabela 4.2 apresenta valores da tensão superficial na interface vapor-líquido, para a água.

A correlação de Rohsenow (4.1) expressa uma forte variação do fluxo de ebulição com ΔT , variando com o cubo da diferença de temperatura. O coeficiente de ebulição pode obter-se dividindo o fluxo por ΔT , e portanto varia com o quadrado desta diferença. Para a água à pressão atmosférica o fluxo chega a 1 MW/m^2 , tendo o coeficiente valores entre 10000 e 30000 $\text{W/m}^2\text{C}$.

Tabela 4.3 – Coeficiente C_{cr} para utilização na equação (4.2).

Geometria do aquecedor	C_{cr}	dimensão característica do aquecedor, L	intervalo de $L^* = L [g(\rho_l - \rho_v)/\sigma]^{1/2}$
aquecedor plano horizontal grande	0.149	largura ou diâmetro	$L^* > 27$
aquecedor plano horizontal pequeno ¹	$18.9K_1$	largura ou diâmetro	$9 < L^* < 20$
cilindro horizontal grande	0.12	raio	$L^* > 1.2$
cilindro horizontal pequeno	$0.12L^{*-0.25}$	raio	$0.15 < L^* < 1.2$
esfera grande	0.11	raio	$L^* > 4.26$
esfera pequena	$0.227L^{*-0.5}$	raio	$0.15 < L^* < 4.26$

¹ $K_1 = \sigma/[g(\rho_l - \rho_v)A_{aquec}]$

O ponto C da Figura 4.2 (correspondente a $\Delta T \cong 30^\circ\text{C}$ no caso da água a p_{atm}) designa-se por fluxo máximo, ou fluxo crítico. O seu valor pode obter-se com

$$\dot{q}_{cr} = C_{cr} \Delta h_{lv} \rho_v \left[\frac{\sigma g (\rho_l - \rho_v)}{\rho_v^2} \right]^{1/4} \quad (4.2)$$

sendo independente do material (superfície) e pouco dependente da geometria, dependência que é traduzida pelo fator C_{cr} , que é dado na Tabela 4.3 para diferentes geometrias. Note-se que o fluxo crítico depende bastante da pressão de saturação, devido sobretudo à dependência da tensão superficial e do calor latente.

O fluxo crítico corresponde a um máximo relativo, e designa-se por crítico porque no caso de sistemas em que se pode controlar/variá-lo a potência de aquecimento, um aumento para além desse valor conduzirá a uma temperatura da superfície demasiado elevada, em muitos casos suficiente para a fusão do material – ver ponto E e valores de ΔT na Figura 4.2.

Em sistemas em que se controla a temperatura da superfície, ao ultrapassar a ΔT do ponto C começam a formar-se bolsas de vapor, resultantes do rebentamento das bolhas antes de se libertarem da superfície. Forma-se uma película de vapor junto à superfície quente, e devido à má condutibilidade térmica do vapor, a transferência de calor diminui. Por isso, entre o ponto C e o ponto D o fluxo diminui, sendo o regime designado por regime de transição, havendo partes da superfície com bolsas de vapor e partes em contacto com líquido. À medida que a temperatura aumenta a zona coberta por bolsas de vapor vai aumentando de extensão, até cobrir toda a superfície.

O ponto D é um ponto de fluxo mínimo (relativo), também designado por ponto de Leidenfrost. Corresponde a $\Delta T \cong 120^\circ\text{C}$ no caso da água a p_{atm} . A partir do ponto D toda a superfície está coberta pelo filme de vapor, designando-se esse regime por ebulição em filme. Nessa zona, a radiação térmica passa a ter também um peso importante na transferência de calor. Podem encontrar-se correlações para cálculo do fluxo mínimo (em D) e para o fluxo na zona DE em [1, 2]. No entanto, a esmagadora maioria dos equipamentos para ebulição são projetados para funcionar no regime de ebulição nucleada, que permite fluxos de calor elevados, sem necessidade de elevadas temperaturas superficiais (graças aos elevados coeficientes de transferência de calor).

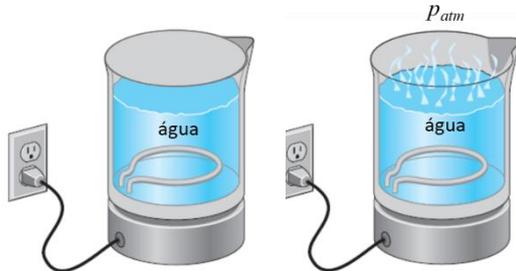
As equações vistas assumem a existência de ebulição saturada, com todo o líquido à temperatura de saturação. No caso da ebulição subarrefecida, no regime de ebulição em convecção natural podem calcular-se os coeficientes usando $(T_{sup} - T_{liq})^n$ ou $(\Delta T_{excess} + \Delta T_{sub})^n$. Na ebulição nucleada a influência do subarrefecimento é desprezável, embora \dot{q}_{cr} e \dot{q}_{min} aumentem linearmente com ΔT_{sub} .

Saliente-se finalmente que é possível utilizar superfícies especiais, concebidas para facilitar e intensificar o mecanismo de formação e libertação das bolhas de vapor. Há vários materiais e soluções comercialmente disponíveis. No entanto, na maioria dos casos a informação relativa a coeficientes de transferência é bastante limitada a fluidos e condições operativas particulares.

4.3 Problemas práticos resolvidos (P4.1 a P4.6)

Os problemas que se seguem exemplificam a aplicação das correlações vistas para cálculo da transferência de calor quando há ebulição em reservatório. São considerados exemplos em regime permanente e também em regime instacionário.

P4.1



Dentro de uma chaleira é colocado 1 litro de água, inicialmente a 20°C. A resistência elétrica de aquecimento é em aço inox polido, tem um comprimento de 20 cm e 4 mm de diâmetro, e fornece uma potência à água de 750 W.

Calcule o tempo necessário a que toda a água atinja 100°C, desde que se liga a resistência.

O coeficiente global de perdas da água para o exterior (a 20°C) é igual a 10 W/m²K, e ela perde calor através das paredes laterais e tampa da chaleira, que se podem considerar à temperatura da água. A água ocupa um diâmetro de 10 cm e uma altura de 12,7 cm.

Depois de se atingir a ebulição (saturada), é retirada a tampa, mas, por esquecimento, a resistência permanece ligada. Nessa situação, calcule a temperatura da resistência e a massa de água que permanece na chaleira ao fim de 15 minutos da retirada a tampa.

Resolução e discussão

Temos de considerar 2 situações diferentes: numa 1ª fase a água é aquecida com aumento da sua temperatura ao longo do tempo; numa 2ª fase, depois de toda a massa de água atingir a temperatura de ebulição, a água continua a receber calor, mas a sua temperatura não se altera (o calor recebido é usado para passar a água ao estado de vapor).

Na 1ª fase é razoável admitir a água a uma temperatura uniforme (sistema global), pois, para além das perdas não serem muito elevadas, o aquecimento provoca movimentos na água que tendem a uniformizar a temperatura (convecção natural). Assim, temos uma situação de um corpo (água) que recebe potência calorífica constante (do aquecedor) e perde uma potência em função da diferença de temperaturas para o exterior. É a situação das equações (1.45) e (1.46), pelo que podemos escrever

$$\rho_{\text{ág}} V_{\text{ág}} c_{p,\text{ág}} \frac{dT}{dt} = \dot{Q}_{\text{aq}} - (UA)_{\text{perdas}}(T - T_{\text{ext}})$$

com a solução

$$\frac{T - T_{\text{ext}} - \dot{Q}_{\text{aq}} / (UA)_{\text{perdas}}}{T_i - T_{\text{ext}} - \dot{Q}_{\text{aq}} / (UA)_{\text{perdas}}} = \exp\left(-\frac{(UA)_{\text{perdas}}}{\rho_{\text{ág}} V_{\text{ág}} c_{p,\text{ág}}} t\right)$$

com $(UA)_{\text{perdas}}$ igual a

$$\begin{aligned} (UA)_{\text{perdas}} &= 10 \times (\pi D_{\text{ág}} H_{\text{ág}} + \pi D_{\text{ág}}^2 / 4) = 10 \times \pi \times (0,1 \times 0,127 + 0,1^2 / 4) = \\ &= 0,478 \text{ W/}^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Substituindo as temperaturas inicial (20°C) e final (100°C), e propriedades da água líquida (a (20+100)/2):

$$\frac{100 - 20 - 750 / 0,478}{20 - 20 - 750 / 0,478} = \exp\left(-\frac{0,478}{983 \times 0,001 \times 4185} t\right)$$

que conduz a um tempo igual a

$$t = 450,4 \text{ s} = 7,5 \text{ min.}$$

Depois, durante a 2ª fase, passaremos a ter ebulição na água, provocada pelo contacto com a resistência elétrica mais quente. No entanto, não conhecemos a temperatura desta. Vamos assumir que ela provoca ebulição nucleada, o que verificaremos posteriormente. Neste regime de ebulição temos – equação (4.1):

$$\dot{Q}_{aq} = A_{sup} \mu_l \Delta h_{lv} \left[\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma} \right]^{1/2} \left[\frac{c_{p,l}(T_{sup} - T_{sat})}{C_{sf} \Delta h_{lv} Pr_l^n} \right]^3$$

que, com as propriedades da água a $T_{sat} = 100^\circ\text{C}$, e coeficientes da Tabela 4.1, equivale a

$$\dot{Q}_{aq} = \pi \times 0,004 \times 0,20 \times 0,282 \times 10^{-3} \times 2257 \times 10^3 \left[\frac{9,8 \times (957,9 - 0,60)}{0,0589} \right]^{1/2} \times \left[\frac{4217 \times (T_{sup} - 100)}{0,013 \times 2257 \times 10^3 \times 1,75^1} \right]^3 = 750$$

e permite calcular

$$T_{sup} = 112,9^\circ\text{C}$$

temperatura da superfície da resistência que se mantém constante durante a 2ª fase, e que corresponde ao regime de ebulição nucleada admitido (ver Figura 4.2). O coeficiente de transferência por ebulição correspondente é igual a $23195 \text{ W/m}^2\text{C}$.

Durante a 2ª fase, nem toda a potência fornecida pela resistência está disponível para a evaporação da água à superfície do líquido (interface com o ar), porque há perdas para o exterior. Considerando o coeficiente de perdas conhecido para as paredes laterais, e que a transferência de calor na superfície se dá só por evaporação (muito mais significativa que a convecção ou a radiação, devido ao elevado calor latente de vaporização), podemos escrever um balanço energético formulando que a variação total de energia (na água líquida – a temperatura constante e igual a T_{sat} – e no vapor de água), igual a:

$$\frac{d(M_{\dot{a}g,l} c_{p,l} T)}{dt} + \frac{d(M_{\dot{a}g,v} h_v)}{dt} = c_{p,l} T_{sat} \frac{dM_{\dot{a}g,l}}{dt} + h_v \dot{M}_v = -\dot{M}_v h_l + \dot{M}_v h_v = \dot{M}_v \Delta h_{lv}$$

é devida à energia fornecida menos as perdas, ou seja:

$$\dot{M}_v \Delta h_{lv} = \dot{Q}_{aq} - (UA)_{perdas,2^a \text{ fase}} (T_{sat} - T_{ext})$$

Então podemos calcular o caudal evaporado à superfície na 2ª fase:

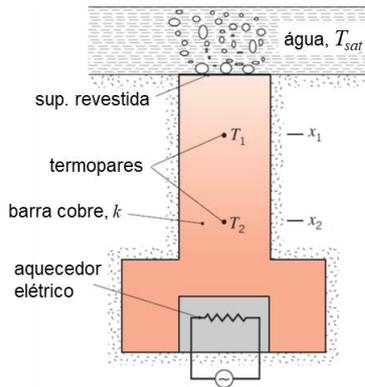
$$\dot{M}_v = \frac{\dot{Q}_{aq} - (UA)_{perdas,2^a \text{ fase}} (T_{sat} - T_{ext})}{\Delta h_{lv}} = \frac{750 - 0,399 \times (100 - 20)}{2257 \times 10^3} = 3,182 \times 10^{-4} \text{ kg/s}$$

Decorridos 15 min da 2ª fase, a variação de massa de água líquida é

$$\Delta M_{\dot{a}g,l} = -\dot{M}_v \Delta t = -3,182 \times 10^{-4} \times 15 \times 60 = -0,286 \text{ kg}$$

o que corresponde a cerca de 30% da massa de água inicial.

Note-se que neste caso as perdas para o exterior (coeficiente de perdas) têm um peso pequeno. Se o coeficiente de perdas aumentar para o dobro ($20 \text{ W/m}^2\text{C}$), o tempo necessário para atingir 100°C seria de 463 s (mais 13 s), e a massa evaporada na 2ª fase seria de 0,274 kg. Tal depende do grau de isolamento das paredes da chaleira e também do seu revestimento exterior, devido à radiação emitida para o exterior (modo que trataremos no capítulo seguinte).

P4.2


A figura representa um dispositivo para experiências de ebulição. A barra de cobre ($k=400 \text{ W/mK}$) está exposta a água em ebulição na extremidade superior, e tem um aquecedor elétrico na outra extremidade, estando bem isolada nas outras fronteiras. São colocados 2 termopares na barra, medindo as temperaturas em 2 pontos, às distâncias $x_1 = 10 \text{ mm}$ e $x_2 = 25 \text{ mm}$ da extremidade superior.

A experiência, com ebulição nucleada em regime permanente na água saturada à pressão atmosférica, permite calcular o coeficiente C_{sf} de uma superfície revestida.

Nessas condições, as temperaturas registradas são $T_1 = 133,7^\circ\text{C}$ e $T_2 = 158,6^\circ\text{C}$. Se o expoente n for igual a 1, qual será o valor de C_{sf} para a superfície revestida?

Represente T_1 , T_2 e T_{sup} para fluxos entre 10^5 W/m^2 e \dot{q}_{cr} .

Resolução e discussão

Há transferência de calor em regime permanente na barra de cobre, sendo que a potência fornecida pelo aquecedor é totalmente transferida para a água, provocando a ebulição desta.

Para as temperaturas medidas vamos calcular o fluxo de calor. Em regime permanente:

$$\dot{q} = \frac{k}{\Delta x} (T_2 - T_1) = \frac{400}{0,015} (158,6 - 133,7) = 6,64 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$

Como a variação de temperatura na barra é linear, podemos calcular a temperatura da superfície revestida:

$$T_{sup} = T_1 - \frac{x_1}{k} \dot{q} = 133,7 - \frac{0,010}{400} \times 6,64 \times 10^5 = 117,1^\circ\text{C}$$

Podemos agora usar a equação (4.1) para a ebulição nucleada, relacionando o fluxo com ΔT , o que permite calcular C_{sf} :

$$C_{sf} = \frac{c_{p,l}(T_{sup}-T_{sat})}{\Delta h_{lv} Pr_l^n} \left(\frac{\mu_l \Delta h_{lv}}{\dot{q}} \right)^{1/3} \left[\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma} \right]^{1/6}$$

Sendo então o expoente n igual a 1 (para a água), e as propriedades a 100°C , vem:

$$C_{sf} = \frac{4217 \times (117,1 - 100)}{2257 \times 10^3 \times 1,75^1} \left(\frac{0,282 \times 10^{-3} \times 2257 \times 10^3}{6,64 \times 10^5} \right)^{1/3} \left[\frac{9,8 \times (957,9 - 0,60)}{0,0589} \right]^{1/6} = 0,01325$$

Para analisar como variam T_1 , T_2 e T_{sup} com o fluxo fornecido, para valores do fluxo entre 10^5 W/m^2 e \dot{q}_{cr} , vamos certificar-nos de que nos encontramos sempre no regime de ebulição nucleada.

Vamos calcular T_{sup} para o valor mais baixo do fluxo:

$$\dot{q}_{min} = \mu_l \Delta h_{lv} \left[\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma} \right]^{1/2} \left[\frac{c_{p,l}(T_{sup,min}-T_{sat})}{C_{sf} \Delta h_{lv} Pr_l^n} \right]^3 = 10^5 \text{ W/m}^2$$

que, para as mesmas propriedades, resulta em

$$T_{sup,min} = 109,1^\circ\text{C}$$

Estamos assim na zona de ebulição nucleada mesmo com o fluxo menor a considerar, como se pode confirmar pela Figura 4.2.

O fluxo máximo ou crítico pode calcular-se pela equação (4.2), com

$$C_{cr} = 0,149$$

porque sendo a superfície aquecedora um plano horizontal, vem da Tabela 4.3

$$L^* = L[g(\rho_l - \rho_v)/\sigma]^{1/2} = 399 L$$

verificando-se muito provavelmente que $L^* > 27$ (desde que $L > 7$ cm).

Então, pela correlação (4.2):

$$\begin{aligned} \dot{q}_{cr} &= C_{cr} \Delta h_{lv} \rho_v \left[\frac{\sigma g(\rho_l - \rho_v)}{\rho_v^2} \right]^{1/4} = 0,149 \times 2257 \times 10^3 \times 0,60 \times \\ &\quad \times \left[\frac{0,0589 \times 9,8 \times (957,9 - 0,60)}{0,60^2} \right]^{1/4} = 1,263 \times 10^6 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

A temperatura da superfície que corresponde a este fluxo crítico pode obter-se da equação (4.1), impondo o valor do fluxo:

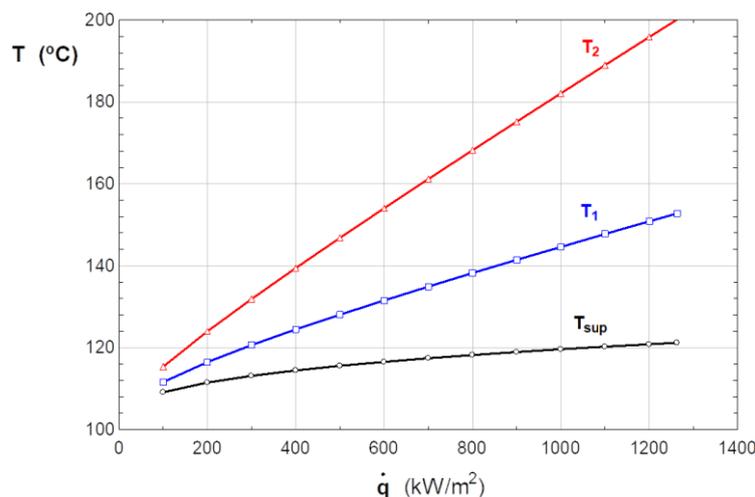
$$\dot{q}_{cr} = \mu_l \Delta h_{lv} \left[\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma} \right]^{1/2} \left[\frac{c_{p,l}(T_{sup,max} - T_{sat})}{C_{sf} \Delta h_{lv} Pr_l^n} \right]^3 = 1,263 \times 10^6 \text{ W/m}^2$$

o que, com as mesmas propriedades, permite calcular

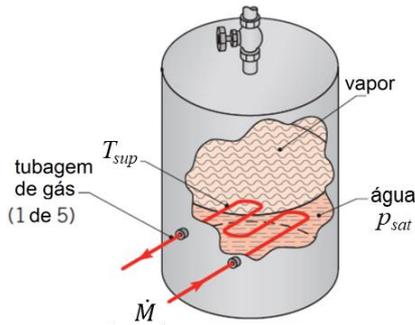
$$T_{sup,max} = 121,2^\circ\text{C}$$

Repetindo a equação de Rohsenow (4.1) para vários valores de fluxo intermédios podemos calcular os vários valores de T_{sup} . Quanto a T_1 e T_2 , podem ser calculados pelas equações da condução em regime permanente já usadas para o fluxo inicial.

O gráfico abaixo representa então a temperatura da superfície, e as temperaturas T_1 e T_2 , em função do fluxo fornecido.



Note-se que a temperatura da superfície revestida aumenta relativamente pouco com o aumento do fluxo de calor fornecido, porque o coeficiente de ebulição aumenta fortemente com o aumento dessa temperatura. Para o fluxo crítico de 1263 kW/m^2 a temperatura da superfície é de $121,2^\circ\text{C}$, como calculado anteriormente, e para metade do fluxo é de $116,8^\circ\text{C}$, ou seja, apenas $4,4^\circ\text{C}$ mais baixa. Quanto a T_1 e T_2 , variam mais acentuadamente, em especial T_2 .

P4.3


Uma caldeira produz vapor de água saturado, alimentada por gases de combustão à temperatura de 700°C. A transferência de calor dos gases para a água dá-se através de 5 tubos de cobre polido muito finos (de espessura desprezável) com 25 mm de diâmetro e 8 m de comprimento (cada), mergulhados em água pressurizada a 4,37 bar. As paredes dos tubos podem considerar-se isotérmicas. O caudal de gases (com propriedades semelhantes às do ar a 1 atm) é de 0,08 kg/s/tubo.

Calcule a temperatura média dos tubos e a temperatura de saída dos gases, assim como a potência transferida e o caudal de vapor produzido. Analise o efeito da pressão da caldeira (para $1 < p_{sat} < 10$ atm).

Resolução e discussão

Nesta caldeira são os gases que fornecem a potência necessária à vaporização da água líquida, que depois é retirada. Em regime permanente há então igualdade entre a variação da energia por unidade de tempo perdida pelos gases (entre a entrada e a saída), e a energia por unidade de tempo transferida entre a superfície dos tubos e a água líquida (por ebulição), que se traduz pela equação

$$\dot{Q}_{gases} = \dot{Q}_{ebul}$$

ou

$$\dot{M}c_{p,gas}(T_{ent} - T_{sai}) = A_{sup} \mu_l \Delta h_{lv} \left[\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma} \right]^{1/2} \left[\frac{c_{p,l}(\bar{T}_{sup} - T_{sat})}{C_{sf} \Delta h_{lv} Pr_l^n} \right]^3$$

admitindo a existência de ebulição nucleada, o que verificaremos depois de calcular \bar{T}_{sup} . A temperatura média dos tubos é responsável pela ebulição. Para a ebulição saturada vamos usar a T_{sat} que corresponde à pressão da caldeira, de 4,37 bar, e que é igual a 147°C. As propriedades da água líquida e vapor são então tomadas a essa temperatura. Quanto aos coeficientes, $C_{sf} = 0,013$ e $n = 1$ (da Tabela 4.1). As propriedades dos gases serão consideradas iguais às do ar a 1 atm e 700°C (não se conhecendo as outras temperaturas).

Como os 5 tubos estão colocados em paralelo, podemos efetuar o cálculo apenas para um deles, vindo então

$$0,08 \times 1075 \times (700 - T_{sai}) = \pi \times 0,025 \times 8 \times 185 \times 10^{-6} \times 2123 \times 10^3 \times \left[\frac{9,8 \times (919 - 2,4)}{0,0494} \right]^{1/2} \times \left[\frac{4302 \times (\bar{T}_{sup} - 147)}{0,013 \times 2123 \times 10^3 \times 1,161} \right]^3$$

Como não conhecemos a temperatura de saída dos tubos (T_{sai}) nem a temperatura média dos tubos (\bar{T}_{sup}), necessitamos de outra equação. Vamos recorrer à equação para a evolução de temperatura dos gases desde a entrada à saída – a já conhecida equação (2.26):

$$\frac{(T_{sai} - \bar{T}_{sup})}{(T_{ent} - \bar{T}_{sup})} = \exp\left(-\frac{\bar{h}_{gas} \pi D_t L_t}{\dot{M} c_{p,gas}}\right)$$

que exige o conhecimento do coeficiente de convecção interior (gases) para, juntamente com a equação anterior, permitir calcular T_{sai} e \bar{T}_{sup} .

O coeficiente de convecção interior pode calcular-se como vimos no capítulo 2, considerando que o tubo é reto. Para o caudal dado, o escoamento é turbulento, daí resultando um coeficiente na zona desenvolvida igual a 502 W/m²°C. O comprimento de entrada, em regime turbulento, corresponde a cerca de 10 diâmetros, ou seja neste caso 0,25 m, pelo que se pode tomar um valor médio aproximado como o da zona desenvolvida, ou para ser mais exato usar a equação (2.23), e obter $\bar{h}_{gas} = 552$ W/m²°C.

O sistema de 2 equações a resolver, considerando $\bar{h}_{gas} = 502$, é então

$$\begin{cases} 86 \times (700 - T_{sai}) = 255,3 \times (\bar{T}_{sup} - 147)^3 \\ (T_{sai} - \bar{T}_{sup}) = (700 - \bar{T}_{sup}) \times \exp(-0,007306 \times 502) \end{cases}$$

que permite calcular

$$\begin{cases} T_{sai} = 166,6^\circ\text{C} \\ \bar{T}_{sup} = 152,6^\circ\text{C} \end{cases}$$

Por substituição obtém-se uma potência transferida de 45,9 kW em cada tubo (229,4 kW nos 5 tubos), e, dividindo a potência pelo calor latente, obtém-se um caudal total vaporizado de 0,108 kg/s (com os 5 tubos).

A temperatura média da superfície dos tubos obtida corresponde efetivamente ao regime de ebulição nucleada, como veremos mais à frente. Apesar de a temperatura dos gases variar bastante entre a entrada e a saída (de 700°C até 166,6°C), devido ao seu calor específico relativamente baixo, a temperatura da superfície dos tubos não varia apreciavelmente, como veremos a seguir. Podemos avaliar a temperatura dos tubos à entrada e à saída, igualando em cada secção o fluxo de convecção ao de ebulição:

$$\begin{cases} h_{gas,ent}(T_{ent} - T_{sup,ent}) = \mu_l \Delta h_{lv} \left[\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma} \right]^{1/2} \left[\frac{c_{p,l}(T_{sup,ent} - T_{sat})}{C_{sf} \Delta h_{lv} Pr_l^n} \right]^3 = 406,3(T_{sup,ent} - 147)^3 \\ h_{gas,sai}(T_{sai} - T_{sup,sai}) = \mu_l \Delta h_{lv} \left[\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma} \right]^{1/2} \left[\frac{c_{p,l}(T_{sup,sai} - T_{sat})}{C_{sf} \Delta h_{lv} Pr_l^n} \right]^3 = 406,3(T_{sup,sai} - 147)^3 \end{cases}$$

Usando para a saída o coeficiente da zona desenvolvida (502 W/m²°C), e para a entrada o mesmo, apesar de se estar na zona de entrada do tubo, obtêm-se

$$\begin{cases} T_{sup,ent} = 155,8^\circ\text{C} \\ T_{sup,sai} = 149,8^\circ\text{C} \end{cases}$$

ou seja, uma diferença de apenas 6°C, diferença que será ainda menor se se considerar que à entrada o coeficiente de convecção é superior ao da zona desenvolvida. Por substituição destes valores nos fluxos obtêm-se

$$\begin{cases} \dot{q}_{ebul,ent} = 276,9 \text{ kW/m}^2 ; h_{ebul,ent} = 31464 \text{ W/m}^2\text{°C} \\ \dot{q}_{ebul,sai} = 8,919 \text{ kW/m}^2 ; h_{ebul,sai} = 3185 \text{ W/m}^2\text{°C} \end{cases}$$

Como os coeficientes de ebulição são muito superiores ao de convecção interior, a temperatura do tubo aproxima-se muito mais da temperatura de saturação, e isso atenua a variação ao longo do tubo. As variações do coeficiente de ebulição e da potência são muito maiores do que a da temperatura, devido à forte dependência do coeficiente e potência da diferença de temperaturas (expoente 2 e 3, respetivamente).

Uma avaliação mais correta dos valores locais dos coeficientes e da temperatura da superfície dos tubos exigiria o cálculo em diferentes pontos do tubo, usando um método numérico de volumes finitos por exemplo, como feito no problema P2.8 para a convecção forçada.

A temperatura do tubo para a qual se inicia o regime de ebulição nucleada pode ser calculada para este caso (equivale ao ponto A da Figura 4.2 para a pressão da caldeira) através da igualdade entre os coeficientes de convecção natural e de ebulição nucleada: a igualdade das 2 expressões permite calcular o valor de T_{sup} de transição. Considerando a expressão do Nu para a convecção natural num cilindro horizontal da Tabela 2.4, teremos que resolver a equação:

$$\frac{k_l}{D_t} \left[0,6 + \frac{0,387 (g\beta_l(T_{sup}-T_{sat})D_t^3/\nu_l^2.Pr_l)^{1/6}}{[1+(0,559/Pr_l)^{9/16}]^{8/27}} \right]^2 = \mu_l \Delta h_{lv} \left[\frac{g(\rho_l-\rho_v)}{\sigma} \right]^{1/2} \left[\frac{c_{p,l}}{C_{sf} \Delta h_{lv} Pr_l^n} \right]^3 (T_{sup} - T_{sat})^2$$

$$\frac{0,686}{0,025} \times \left[0,6 + \frac{0,387 (9,8 \times 0,001 \times (T_{sup}-147) \times 0,025^3 / (2,013 \times 10^{-7})^2 \times 1,16)^{1/6}}{[1+(0,559/1,16)^{9/16}]^{8/27}} \right]^2 = 406,3 \times (T_{sup} - 147)^2$$

que permite obter para o ponto A, $T_{sup,A} = 148,3^\circ\text{C}$, pelo que neste caso estamos acima desse valor.

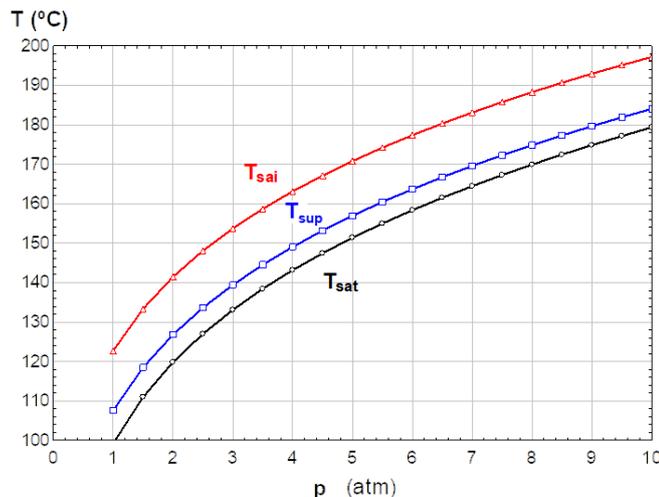
Para a pressão reinante na caldeira podemos calcular o fluxo de ebulição crítico. Sendo $L^* > 1,2$, obtém-se da Tabela 4.3 $C_{cr} = 0,12$, vindo da equação (4.2):

$$\dot{q}_{cr} = C_{cr} \Delta h_{lv} \rho_v \left[\frac{\sigma g(\rho_l-\rho_v)}{\rho_v^2} \right]^{1/4} =$$

$$= 0,12 \times 2123 \times 10^3 \times 2,4 \times \left[\frac{0,0494 \times 9,8 \times (919-2,4)}{2,4^2} \right]^{1/4} = 1,811 \text{ MW/m}^2$$

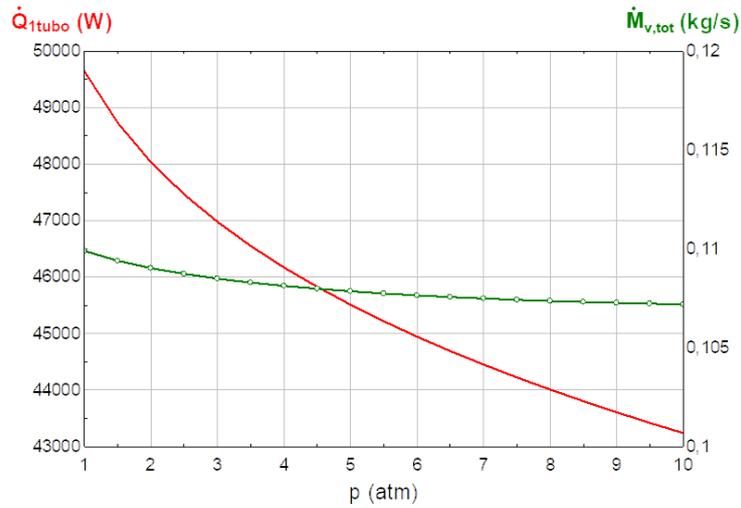
Igualando este fluxo ao fluxo escrito anteriormente $(406,3(T_{sup} - 147)^3)$, pode calcular-se a temperatura da superfície a que corresponde o fluxo crítico, resultando $T_{sup,cr} = 163,5^\circ\text{C}$. Estamos assim sempre na zona de ebulição nucleada, já que as temperaturas do tubo são bastante inferiores à do ponto crítico.

Para analisar o efeito da regulação da pressão da caldeira, foram repetidos os cálculos anteriores para as diferentes pressões. A figura seguinte representa as temperaturas obtidas.

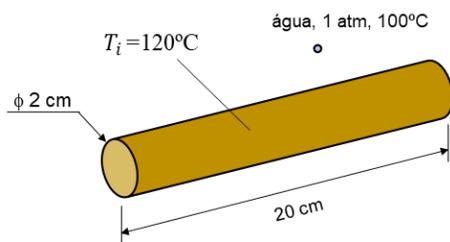


Saliente-se que ao aumentar a pressão aumenta a temperatura de saturação, seguindo a temperatura média da superfície dos tubos e a temperatura de saída evoluções semelhantes.

A figura seguinte representa a potência transferida (num dos 5 tubos) e o caudal total vaporizado, para as diferentes pressões.



A potência diminui com o aumento da pressão, porque a diferença de temperatura para a transferência de calor diminui (com o aumento da temperatura de saturação da água). Quanto ao caudal de vapor, também diminui, mas não tão acentuadamente; isso deve-se a que o calor latente de vaporização também diminui quando a pressão/temperatura aumenta.

P4.4


Uma barra cilíndrica de cobre polido ($\alpha=117 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $k=400 \text{ W/m}^\circ\text{C}$), inicialmente à temperatura de 120°C , é colocada num banho de água saturada, à pressão atmosférica. Admitindo que a temperatura do banho se mantém inalterada, calcule o tempo que demora a que a barra atinja o equilíbrio térmico com o banho.

Resolução e discussão

Neste problema a barra cilíndrica vai variar a sua temperatura ao longo do tempo, ou seja, trata-se de um problema em regime instacionário. Para quantificação da transferência de calor da superfície da barra para o banho, que se dá por ebulição, vamos admitir que em cada instante se atinge o regime permanente (quase estacionário).

Vamos também admitir que a variação da temperatura no interior da barra, quando comparada com a exterior (entre a superfície e o banho), é desprezável, ou seja, vamos admitir a barra como um sistema global, a temperatura uniforme em cada instante. Esta hipótese será válida se o número de Biot for inferior a 0,1. Considerando a espessura característica

$$L_c = \frac{V}{A_{sup}} = \frac{\pi D^2 L / 4}{\pi D L + 2\pi D^2 / 4} = 0,00476 \text{ m}$$

podemos ter $Bi < 0,1$ desde que o coeficiente de ebulição seja

$$h < 0,1 \frac{k}{L_c} = 0,1 \times \frac{400}{0,00476} = 8403 \text{ W/m}^2\text{C}$$

o que avaliaremos posteriormente, quando calcularmos os coeficientes de ebulição, que variam no tempo.

Para as propriedades da água saturada, a 100°C , vamos considerar:

$\mu_l = 0,282 \times 10^{-3} \text{ kg/ms}$, $\Delta h_{lv} = 2257 \text{ kJ/kg}$, $\rho_l = 957,9 \text{ kg/m}^3$, $\rho_v = 0,6 \text{ kg/m}^3$, $\sigma = 0,0589 \text{ N/m}$, $c_{pl} = 4217 \text{ J/kgK}$, $Pr_l = 1,75$, $k_l = 0,683$.

Começemos por verificar se na situação inicial ocorre o regime de ebulição nucleada. O fluxo crítico pode obter-se a partir da equação (4.2):

$$C_{cr} = 0,12 \text{ , pois da Tabela 4.3: } L^* = D/2 [g(\rho_l - \rho_v)/\sigma]^{1/2} = 3,99$$

$$\begin{aligned} \dot{q}_{cr} &= C_{cr} \Delta h_{lv} \rho_v \left[\frac{\sigma g (\rho_l - \rho_v)}{\rho_v^2} \right]^{1/4} = 0,12 \times 2257 \times 10^3 \times 0,60 \times \\ &\quad \times \left[\frac{0,0589 \times 9,8 \times (957,9 - 0,60)}{0,60^2} \right]^{1/4} = 1,017 \times 10^6 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

e da correlação (4.1), podemos obter a temperatura da superfície correspondente

$$\begin{aligned} 1,017 \times 10^6 &= 0,282 \times 10^{-3} \times 2257 \times 10^3 \times \left[\frac{9,8 \times (957,9 - 0,60)}{0,0589} \right]^{1/2} \times \\ &\quad \times \left[\frac{4217 \times (T_{sup,cr} - 100)}{0,013 \times 2257 \times 10^3 \times 1,75^1} \right]^3 \end{aligned}$$

com $C_{sf} = 0,013$ e $n=1$ (da Tabela 4.1 para água e cobre polido), de onde resulta

$$T_{sup,cr} = 119,3^\circ\text{C}$$

e o correspondente coeficiente de ebulição de $52694 \text{ W/m}^2\text{C}$. Este valor é muito superior ao limite de 8403 para satisfazer $Bi < 0,1$; equivale a $Bi=6,3$. Vamos, no entanto, continuar a

considerar a barra como um sistema global, apesar do erro cometido, que só se conseguiria evitar com a utilização de um método numérico, considerando a variação de temperatura no interior da barra (como se fez no problema P3.7 para uma esfera com coeficiente de condensação à superfície variável no tempo).

Vamos considerar que esta temperatura é praticamente igual à temperatura inicial da barra (120°C), e portanto considerar que no instante inicial (e seguintes) existe ebulição nucleada, podendo usar-se a correlação acima (de Rohsenow). Quando as temperaturas da superfície se tornam próximas da temperatura de saturação, o regime de ebulição nucleada dá lugar ao de convecção natural (ponto A da Figura 4.2). Isso ocorre quando o coeficiente de ebulição dado pela correlação de Rohsenow iguala o coeficiente de convecção natural, ou seja, quando

$$\frac{k_l}{D_t} \left[0,6 + \frac{0,387 (g\beta_l(T_{sup}-T_{sat})D_t^3/\nu_l^2.Pr_l)^{1/6}}{[1+(0,559/Pr_l)^{9/16}]^{8/27}} \right]^2 = \mu_l \Delta h_{lv} \left[\frac{g(\rho_l-\rho_v)}{\sigma} \right]^{1/2} \left[\frac{c_{p,l}}{C_{sf} \Delta h_{lv} Pr_l^n} \right]^3 (T_{sup} - T_{sat})^2$$

$$\frac{0,683}{0,02} \times \left[0,6 + \frac{0,387 (9,8 \times 0,000751 \times (T_{sup}-100) \times 0,02^3 / (2,944 \times 10^{-7})^2 \times 1,75)^{1/6}}{[1+(0,559/1,75)^{9/16}]^{8/27}} \right]^2 = 138,6 \times (T_{sup} - 100)^2$$

que permite obter para o ponto A, $T_{sup,A} = 102,3^\circ\text{C}$; o coeficiente de transferência de calor correspondente é igual a $733 \text{ W/m}^2\text{C}$. Para simplificar a resolução, vamos admitir que se pode continuar a usar a equação de Rohsenow (4.1) para a ebulição nucleada, mesmo quando há convecção natural. Para ser mais exato, dever-se-ia dividir a evolução em 2 partes: uma primeira parte até $T_{sup} = 102,3^\circ\text{C}$ usando a correlação de ebulição nucleada, e uma segunda parte desde esta temperatura até 100°C usando a correlação para convecção natural.

Considerando essa simplificação, vamos então escrever o balanço de sistema global (barra à temperatura T), traduzido por:

$$\rho_{cobre} c_{p,cobre} L_c \frac{dT}{dt} = -\mu_l \Delta h_{lv} \left[\frac{g(\rho_l-\rho_v)}{\sigma} \right]^{1/2} \left[\frac{c_{p,l}(T-T_{sat})}{C_{sf} \Delta h_{lv} Pr_l^n} \right]^3$$

$$16273,5 \frac{dT}{dt} = -138,6 \times (T - 100)^3$$

ou

$$\frac{dT}{(T-100)^3} = -0,00852 dt$$

A integração desta equação, sujeita à condição $T|_{t=0} = 120^\circ\text{C}$, é

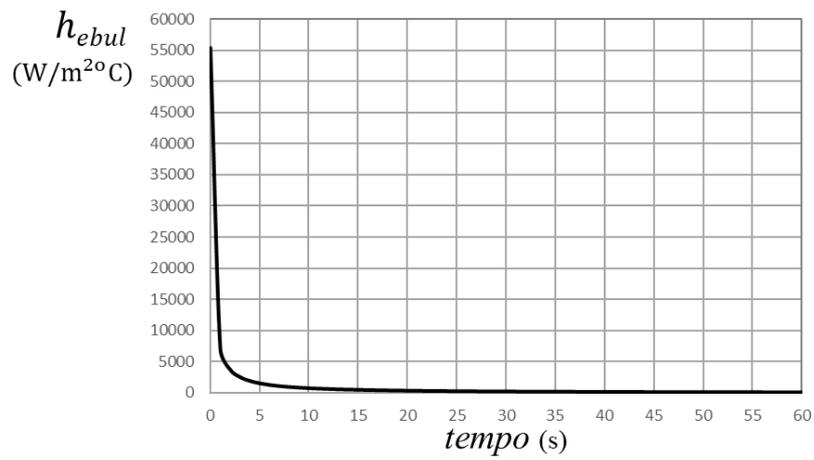
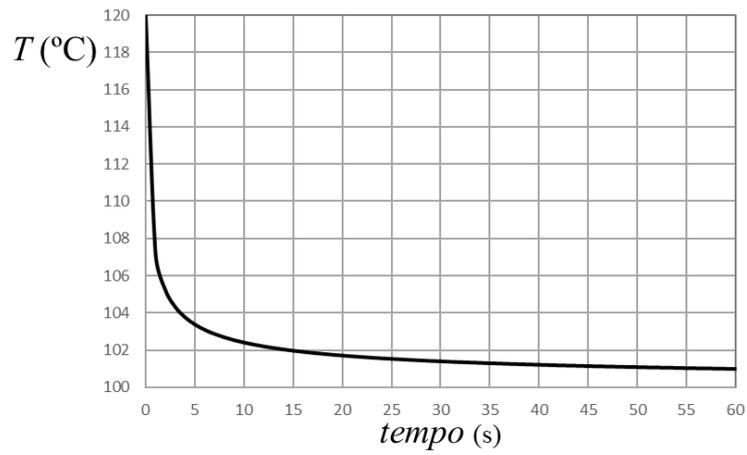
$$(T - 100)^{-2} = 0,01703 t + 20^{-2}$$

ou

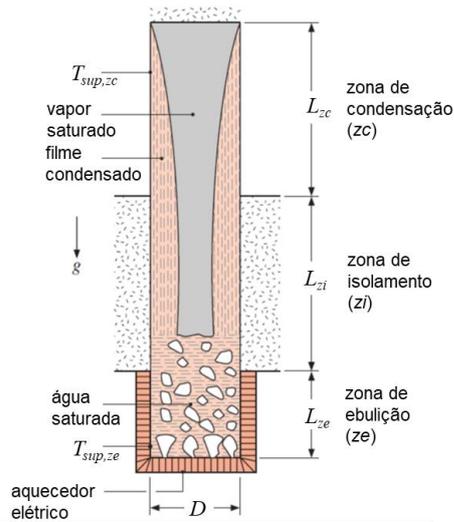
$$T = 100 + \frac{1}{\sqrt{0,01703 t + 0,0025}}$$

Matematicamente a barra atinge $T = 100^\circ\text{C}$ apenas ao fim de um tempo infinito. No entanto, a variação de temperatura é rápida, devido aos elevadíssimos coeficientes de ebulição, especialmente nos instantes iniciais (quando a temperatura da barra é mais elevada). As figuras seguintes representam a evolução da temperatura da barra, usando a equação acima, e também a evolução do coeficiente de ebulição. Note-se novamente que se considerou a correlação para ebulição nucleada mesmo no regime de convecção natural (quando $T < 102,3^\circ\text{C}$). O tempo necessário para atingir esta temperatura é de apenas 11 s. Usando a correlação para o coeficiente

de convecção natural para temperaturas abaixo desta, o arrefecimento a partir desse ponto seria mais rápido (maiores coeficientes de transferência).



P4.5



Um tubo de calor, ou termosifão, consiste num tubo ou recipiente fechado que recebe calor na zona de ebulição (de uma fonte quente) e rejeita calor na zona de condensação (para uma fonte fria). Considere um tubo de aço inox polido de espessura reduzida, com um diâmetro D igual a 20 mm.

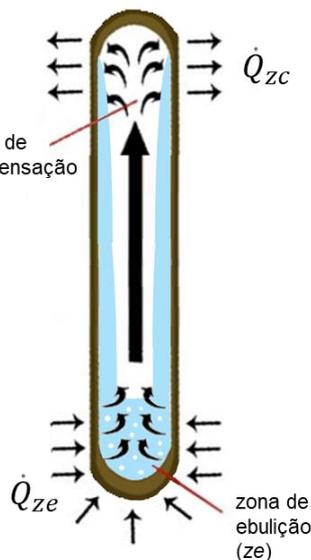
O calor fornecido faz entrar em ebulição a água saturada, à pressão atmosférica, na zona de ebulição de comprimento $L_{ze}=20$ mm. O calor é rejeitado quando o vapor condensa em filme na parede interior da zona de condensação, de comprimento $L_{zc}=40$ mm, regressando o líquido à zona de ebulição. O comprimento da zona intermédia, sem transferência de calor, é $L_{zi}=40$ mm.

Considerando a face superior da zona de condensação isolada, calcule a temperatura superficial da zona de ebulição, $T_{sup,ze}$, quando o fluxo de calor de ebulição é igual a 30% do fluxo crítico, e calcule o caudal condensado e a temperatura superficial da zona de condensação, $T_{sup,zc}$.

Compare a potência calorífica transferida com a transferida por uma barra cilíndrica de cobre ($k=400$ W/mK) com o mesmo diâmetro e comprimento L_{zi} (isolada na superfície lateral), e para as mesmas temperaturas extremas.

Resolução e discussão

A figura seguinte ilustra a transferência de calor no tubo/termosifão. Em regime permanente, a potência recebida provoca a ebulição da água, que depois condensa na zona superior, libertando a mesma potência recebida. Pretendemos calcular essa potência e as temperaturas superficiais de ebulição e condensação.



Para as propriedades da água saturada, a 100°C, vamos considerar:

$$\mu_l=0,282 \times 10^{-3} \text{ kg/ms}, \Delta h_{lv}=2257 \text{ kJ/kg}, \rho_l=957,9 \text{ kg/m}^3, \rho_v=0,6 \text{ kg/m}^3, \sigma=0,0589 \text{ N/m}, c_{pl}=4217 \text{ J/kgK}, Pr_l=1,75, k_l=0,683.$$

Começemos por calcular o fluxo máximo ou crítico, que se pode estimar pela equação (4.2):

$$\dot{q}_{cr} = C_{cr} \Delta h_{lv} \rho_v \left[\frac{\sigma g (\rho_l - \rho_v)}{\rho_v^2} \right]^{1/4}$$

sendo C_{cr} dado na Tabela 4.3, em função da geometria e dimensão da superfície aquecedora. Neste caso o líquido é aquecido pela superfície inferior (disco horizontal) e lateral da zona de ebulição (superfície cilíndrica vertical); o fator C_{cr} distingue fundamentalmente se a superfície aquecedora é grande ou pequena, com base nos parâmetros L e L^* , verificando-se experimentalmente que não tem muita importância se a superfície é horizontal ou vertical; assim, poderemos considerar

$$L = D + 2L_{ze} = 0,06 \text{ m}$$

$$L^* = L[g(\rho_l - \rho_v)/\sigma]^{1/2} = 24$$

e, apesar de L^* ser um pouco inferior a 27, usar

$$C_{cr} = 0,149$$

Então, pela correlação (4.2):

$$\begin{aligned} \dot{q}_{cr} &= C_{cr} \Delta h_{lv} \rho_v \left[\frac{\sigma g (\rho_l - \rho_v)}{\rho_v^2} \right]^{1/4} = 0,149 \times 2257 \times 10^3 \times 0,60 \times \\ &\quad \times \left[\frac{0,0589 \times 9,8 \times (957,9 - 0,60)}{0,60^2} \right]^{1/4} = 1,263 \times 10^6 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

A temperatura da superfície que corresponde ao fluxo fornecido, igual a 30% deste fluxo crítico, pode obter-se da equação de Rohsenow (4.1), impondo o valor do fluxo:

$$\mu_l \Delta h_{lv} \left[\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma} \right]^{1/2} \left[\frac{c_{p,l}(T_{sup,ze} - 100)}{C_{sf} \Delta h_{lv} Pr_l^n} \right]^3 = 3,789 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$

o que, com as mesmas propriedades, e com $C_{sf} = 0,013$ e $n=1$ (da Tabela 4.1 para água e aço inox polido), permite calcular

$$T_{sup,ze} = 113,9^\circ\text{C}$$

A potência total recebida na zona de ebulição é (multiplicando o fluxo pela área):

$$\dot{Q}_{ze} = 3,789 \times 10^5 \times (\pi \times 0,02^2/4 + \pi \times 0,02 \times 0,02) = 595 \text{ W}$$

potência que, em regime permanente, será dissipada na zona de condensação.

A potência transferida por condensação pode relacionar-se com o respetivo coeficiente e diferença de temperaturas; considerando a correlação para condensação numa placa vertical, de altura L_{zc} , em regime laminar não ondulado (a verificar):

$$\dot{Q}_{zc} = \bar{h}_{L_{zc}} A_{zc} (T_{sat} - T_{sup,zc}) = 0,943 \left[\frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3 \Delta h'_{lv}}{\mu_l L_{zc}} \right]^{1/4} (T_{sat} - T_{sup,zc})^{3/4} A_{zc}$$

Como se viu no capítulo 3, as propriedades do líquido deverão ser tomadas à temperatura média entre a da superfície e a de saturação. Não sendo ainda conhecida a temperatura superficial, vamos usar as propriedades a 100°C , que depois poderão ser revistas. Quanto a $\Delta h'_{lv}$, como também depende de $T_{sup,zc}$, vamos considerá-la igual a Δh_{lv} . Então, temos:

$$0,943 \times \left[\frac{9,8 \times 957,9 \times (957,9 - 0,6) \times 0,683^3 \times 2257 \times 10^3}{0,282 \times 10^{-3} \times 0,04} \right]^{1/4} (100 - T_{sup,zc})^{3/4} = \frac{595}{\pi \times 0,02 \times 0,04}$$

que resulta em

$$T_{sup,zc} = 80,9^{\circ}\text{C}$$

Refazendo as propriedades e $\Delta h'_{lv} = 2312 \times 10^3 \text{ J/kg}$ para a temperatura média, obtém-se um valor quase idêntico:

$$T_{sup,zc} = 81,0^{\circ}\text{C}$$

Quanto ao caudal condensado – igual ao vaporizado – é igual a

$$\dot{M}_l = 2,6 \times 10^{-4} \text{ kg/s}$$

Podemos agora verificar se o regime do escoamento do condensado é laminar não ondulado. Usando a equação (3.7):

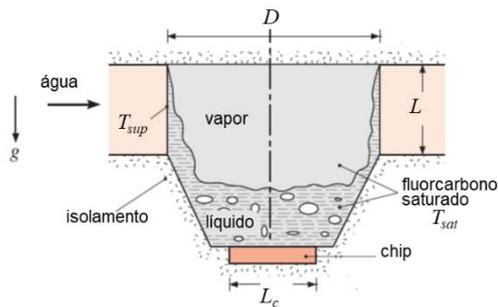
$$Re_{\delta} = \frac{4\dot{M}_l}{\mu_{ll}} = \frac{4 \times 2,6 \times 10^{-4}}{0,282 \times 10^{-3} \times \pi \times 0,02} = 58,7$$

que corresponde a regime laminar, mas ondulado ($Re_{\delta} > 30$). No entanto, como se vê pela Figura 3.3, a diferença no coeficiente de condensação é pequena. Considerando a correlação para regime ondulado da Figura 3.3 obtém-se $\bar{h}_{zc} = 12916$, muito próximo do valor do regime não ondulado, $\bar{h}_{zc} = 12460 \text{ W/m}^2\text{C}$.

Vamos agora comparar a potência transferida com a que se transferiria numa barra cilíndrica de cobre (diâmetro de 20 mm e comprimento de 40 mm), sujeita às mesmas temperaturas nas 2 extremidades: 113,9 e 81°C. Em regime permanente obtém-se:

$$\dot{Q}_{cobre} = \frac{k_{cobre}}{L_{zi}} A_{s,cobre} (T_{ze} - T_{zc}) = \frac{400}{0,04} \times \frac{\pi \times 0,02^2}{4} \times (113,9 - 81,0) = 103 \text{ W}$$

Este valor mostra que a barra de cobre transfere quase 6 vezes menos calor que o termosifão (595 W para este), apesar da sua elevada condutibilidade térmica. O tubo de calor/termosifão, graças aos elevados coeficientes de ebulição (27259 W/m²C) e condensação (12460 W/m²C), oferece uma resistência global bastante menor à transferência de calor. Os tubos de calor podem também usar-se para transferir calor entre 2 fontes (fluidos, etc) a temperaturas muito próximas, e inferiores a 100°C, usando como fluido no interior do tubo a água a uma pressão abaixo da atmosférica, ou outros fluidos de menor temperatura de ebulição.

P4.6


Um sistema para arrefecimento de “chips” de computador usa um termosifão contendo fluorcarbono saturado. O “chip” está perfeitamente ligado ao fundo do recipiente termosifão, sendo o calor do “chip” dissipado na ebulição do líquido (a 57°C), e posteriormente transferido para água de arrefecimento, que mantém a temperatura da parede superior do recipiente mais fria.

As propriedades do fluorcarbono à temperatura de saturação (57°C) e as constantes de ebulição são: $\mu_l = 440 \times 10^{-6}$ kg/ms, $\Delta h_{lv} = 84400$ J/kg, $\rho_l = 1619,2$ kg/m³, $\rho_v = 13,4$ kg/m³, $\sigma = 0,0081$ N/m, $c_{pl} = 1100$ J/kgK, $Pr_l = 9,01$, $k_l = 0,054$, $C_{sf} = 0,005$ e $n = 1,7$.

Se o “chip”, com 2 cm x 2 cm, operar em condições de regime permanente a 90% do fluxo crítico, qual será a potência dissipada? Se o diâmetro superior do recipiente (D) for de 3 cm, e a sua superfície for mantida a 25°C (T_{sup}), qual será o comprimento L requerido?

Resolução e discussão

O sistema termosifão é suposto operar em regime permanente, pelo que a potência recebida do “chip” é depois transferida por condensação do vapor de fluorcarbono formado para as paredes laterais, e por sua vez daí para a água.

Vamos começar por calcular o fluxo com que opera o “chip” e que é igual a 90% do fluxo crítico. Da equação (4.2):

$$\dot{q} = 0,9 \times \dot{q}_{cr} = 0,9 \times C_{cr} \Delta h_{lv} \rho_v \left[\frac{\sigma g (\rho_l - \rho_v)}{\rho_v^2} \right]^{1/4}$$

sendo C_{cr} dado na Tabela 4.3, em função da geometria e dimensão da superfície aquecedora. Neste caso o líquido é aquecido por uma placa horizontal (o “chip”) com largura $L = 0,02$ m; assim, poderemos considerar

$$L^* = L [g (\rho_l - \rho_v) / \sigma]^{1/2} = 0,02 \times [9,8 \times (1619,2 - 13,4) / 0,0081]^{1/2} = 27,9$$

que, sendo > 27 , conduz a

$$C_{cr} = 0,149$$

Então, teremos para o fluxo de ebulição

$$\begin{aligned} \dot{q} &= 0,9 \times C_{cr} \Delta h_{lv} \rho_v \left[\frac{\sigma g (\rho_l - \rho_v)}{\rho_v^2} \right]^{1/4} = 0,9 \times 0,149 \times 84400 \times 13,4 \times \\ &\times \left[\frac{0,0081 \times 9,8 \times (1619,2 - 13,4)}{13,4^2} \right]^{1/4} = 1,392 \times 10^5 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

A temperatura da superfície que corresponde a este fluxo é, usando a equação (4.1) para a ebulição nucleada, e as propriedades/coeficientes conhecidas, obtém-se de

$$440 \times 10^{-6} \times 84400 \times \left[\frac{9,8 \times (1619,2 - 13,4)}{0,0081} \right]^{1/2} \left[\frac{1100 \times (T_{sup,ebul} - 57)}{0,005 \times 84400 \times 9,01^{1,7}} \right]^3 = 1,392 \times 10^5$$

o que permite calcular

$$T_{sup,ebul} = 79,4^\circ\text{C}$$

A potência total recebida na zona de ebulição é (multiplicando o fluxo pela área):

$$\dot{Q} = 1,392 \times 10^5 \times 0,02 \times 0,02 = 55,7 \text{ W}$$

potência que, em regime permanente, será dissipada na zona de condensação.

Quanto ao caudal condensado, dividindo a potência pelo calor latente, temos

$$\dot{M}_l = 6,600 \times 10^{-4} \text{ kg/s}$$

e o número de Reynolds pela equação (3.7):

$$Re_\delta = \frac{4\dot{M}_l}{\mu_l l} = \frac{4 \times 6,6 \times 10^{-4}}{440 \times 10^{-6} \times \pi \times 0,03} = 63,7$$

A este valor de Re_δ corresponde o regime laminar ondulado, para o qual podemos usar a correlação da Figura 3.3:

$$\bar{h}_L = \frac{k_l}{(v_l^2/g)^{1/3}} \frac{Re_\delta}{1,08 Re_\delta^{1,22} - 5,2} = \frac{0,054}{(2,717 \times 10^{-7} / 9,8)^{1/3}} \frac{63,7}{1,08 \times 63,7^{1,22} - 5,2} = 1055 \text{ W/m}^2\text{C}$$

Podemos então agora relacionar o comprimento requerido com o coeficiente e a potência

$$L = \frac{\dot{Q}}{\bar{h}_L \pi D (T_{sat} - T_{sup})} = \frac{55,7}{1055 \times \pi \times 0,03 \times (57 - 25)} = 0,0175 \text{ m}$$

ou seja, o comprimento/altura da zona superior deverá ser de 17,5 mm.

Note-se que a temperatura operativa do “chip” (79,4°C) permite o seu funcionamento normal (não é excessiva). Este é um eficaz e compacto sistema de arrefecimento.

5 Radiação térmica

A radiação térmica é o modo de transferência de calor que não exige a presença de matéria para o transporte do calor, que é transportado por ondas eletromagnéticas. No entanto, é a matéria que está na sua origem, e no seu destino.

Neste texto resumem-se os princípios ligados à radiação térmica e ao comportamento dos corpos reais quanto à radiação que emitem e que recebem. São definidas as propriedades radiativas como a emissividade e os coeficientes de absorção, reflexão e transmissão. São quantificadas as trocas de radiação térmica em regime permanente entre várias superfícies, consideradas como cinzentas e difusas, e separadas por um meio não participante na radiação.

No final do capítulo apresentam-se diversos problemas práticos em que se comenta a aplicação dos conceitos e métodos de cálculo vistos.

5.1 Radiação eletromagnética e térmica

Todos os corpos emitem radiação eletromagnética, sob a forma de ondas eletromagnéticas com diferentes comprimentos de onda. A radiação que os corpos emitem em consequência do seu nível interno de energia (temperatura) é chamada radiação térmica. No entanto, a maior parte dessa radiação é invisível aos nossos olhos. A Figura 5.1 representa o espectro de radiações eletromagnéticas, assinalando a zona de comprimentos de onda que corresponde à radiação térmica, e dentro desta a zona visível. Chamamos luz à porção visível do espectro, contida num pequeno intervalo entre cerca de 0,4 e 0,7 μm .

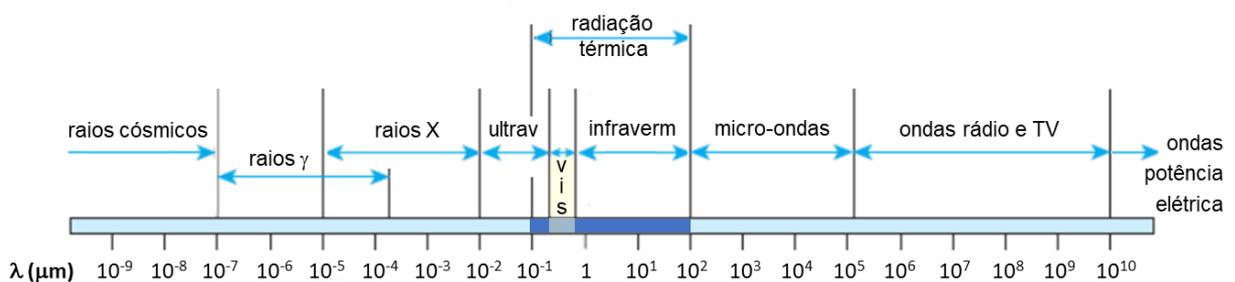


Figura 5.1 – Espectro de radiações eletromagnéticas de acordo com o seu comprimento de onda (λ).

A radiação térmica emitida pelos corpos propaga-se através do vazio (caso da radiação solar no espaço) e da maioria dos gases. Muitos gases, como o ar seco, não interferem nas ondas que os atravessam, designando-se por meios não participantes. Outros, como o vapor de água e o dióxido de carbono, interferem, absorvendo e refletindo parte das ondas, designando-se por meios participantes.

Em materiais opacos a radiação térmica é um fenómeno superficial, pois a radiação emitida pelas partículas interiores não chega à superfície, e a radiação recebida é absorvida numa camada até alguns microns da superfície. Daí que, como veremos, as quantidades de energia associadas à radiação possam ser alteradas apenas com revestimentos superficiais.

Como também veremos, um corpo a temperatura superior ao zero absoluto emite radiação numa gama alargada de comprimentos de onda, e em várias direções do espaço. Então a radiação térmica é um fenómeno em que é necessário tratar a sua natureza espectral e direcional.

5.2 Corpo negro e suas propriedades

Um corpo negro é utilizado como um padrão em relação ao qual são quantificadas as propriedades radiativas dos corpos reais. Ou seja, o corpo negro é um corpo ideal, em termos de comportamento à radiação térmica emitida e recebida. Assim, um corpo negro emite o máximo de radiação possível à temperatura a que se encontra, e com igual intensidade em todas as direções do espaço. Por outro lado, um corpo negro absorve toda a radiação que nele incide, em todos os comprimentos de onda e todas as direções.

A potência calorífica por unidade de área emitida por um corpo negro – também designada por poder emissivo – é dada pela lei de Stefan-Boltzmann:

$$\dot{q}_{em,CN} = \sigma T^4 \tag{5.1}$$

sendo σ a constante de Stefan-Boltzmann, igual a $5,670 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$.

A equação anterior quantifica o total de radiação que um corpo negro emite (em todas as direções e comprimentos de onda), variando com o comprimento de onda de acordo com a lei de Planck (representada graficamente na Figura 5.2):

$$\dot{q}_{em,CN,\lambda} = \frac{3,742 \times 10^8}{\lambda^5 [\exp(1,439 \times 10^4 / \lambda T) - 1]} \tag{5.2}$$

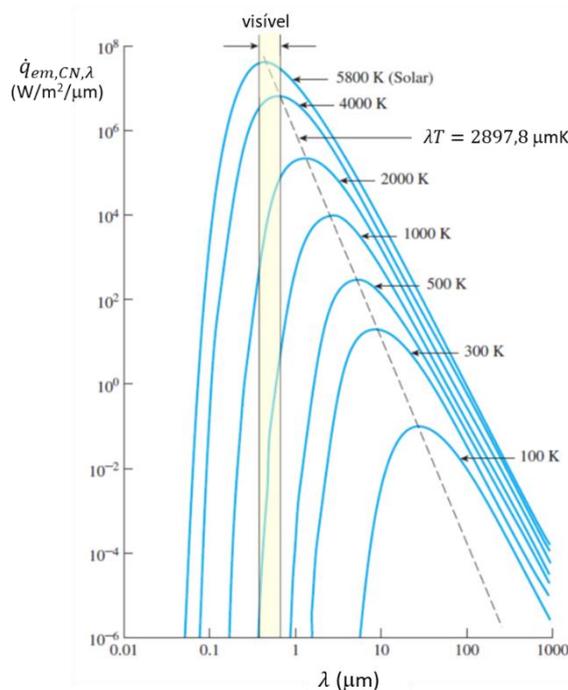


Figura 5.2 – Variação do poder emissivo de um corpo negro com o comprimento de onda (λ) e a temperatura.

Como mostra a Figura 5.2, para cada temperatura existe um comprimento de onda para o qual o poder emissivo espectral é máximo. A curva que une os máximos está também representada na figura (expressa a lei do deslocamento de Wien). O máximo desloca-se para os comprimentos de onda menores quando a temperatura aumenta. À medida que esta aumenta, o corpo negro também pode emitir radiação em comprimentos de onda mais baixos. Como se vê na figura, um corpo à temperatura ambiente (300 K) não emite radiação visível, apenas infravermelha. A radiação emitida pelo Sol equivale à de um corpo negro a 5800 K, e compreende radiação ultravioleta, visível e infravermelha; a percentagem visível é de cerca de 46% do total, e a percentagem infravermelha é a maior.

A partir da lei de Planck – equação (5.2) – é possível calcular a fração/percentagem de energia radiante emitida pelo corpo negro entre 2 comprimentos de onda, através do cálculo do integral entre 2 limites. Por razões práticas, há tabelas que permitem um cálculo rápido, apresentando os valores da fração emitida entre 0 e λ ($F_{0-\lambda}$), que obviamente depende da temperatura do corpo negro. Mostra-se que a variável T pode ser combinada com λ , de modo a existir uma única variável independente, λT – ver Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Fração de radiação emitida por um corpo negro entre 0 e λ ($F_{0-\lambda}$).

λT (μmK)	$F_{0-\lambda}(T)$	λT (μmK)	$F_{0-\lambda}(T)$
200	0.000000	6200	0.754140
400	0.000000	6400	0.769234
600	0.000000	6600	0.783199
800	0.000016	6800	0.796129
1000	0.000321	7000	0.808109
1200	0.002134	7200	0.819217
1400	0.007790	7400	0.829527
1600	0.019718	7600	0.839102
1800	0.039341	7800	0.848005
2000	0.066728	8000	0.856288
2200	0.100888	8500	0.874608
2400	0.140256	9000	0.890029
2600	0.183120	9500	0.903085
2800	0.227897	10,000	0.914199
3000	0.273232	10,500	0.923710
3200	0.318102	11,000	0.931890
3400	0.361735	11,500	0.939959
3600	0.403607	12,000	0.945098
3800	0.443382	13,000	0.955139
4000	0.480877	14,000	0.962898
4200	0.516014	15,000	0.969981
4400	0.548796	16,000	0.973814
4600	0.579280	18,000	0.980860
4800	0.607559	20,000	0.985602
5000	0.633747	25,000	0.992215
5200	0.658970	30,000	0.995340
5400	0.680360	40,000	0.997967
5600	0.701046	50,000	0.998953
5800	0.720158	75,000	0.999713
6000	0.737818	100,000	0.999905

A fração entre 2 comprimentos de onda pode obter-se por diferença, ou seja:

$$F_{\lambda_1-\lambda_2} = F_{0-\lambda_2} - F_{0-\lambda_1} \tag{5.3}$$

Conforme dito atrás, na radiação térmica é necessário tratar a sua natureza espectral e direcional. Para tratar a variação direcional, define-se uma propriedade chamada intensidade de radiação (emitida). Ela representa a radiação por unidade de área perpendicular à direção considerada e por unidade de ângulo sólido associado à direção. Por seu turno, o ângulo sólido caracteriza a porção de espaço centrada em torno de um ponto qualquer (P) – ver Figura 5.3.

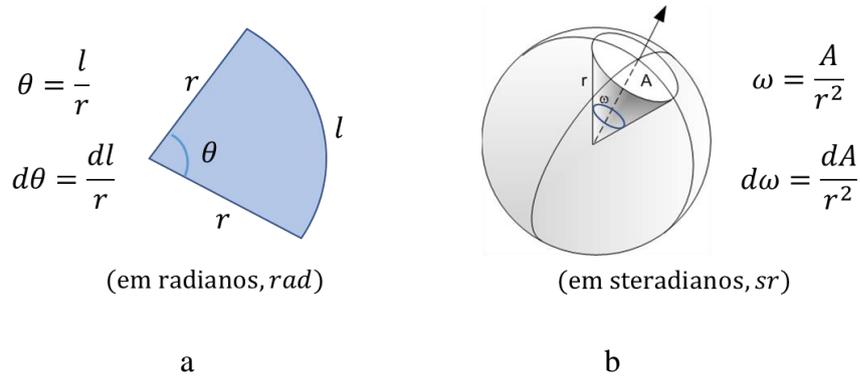


Figura 5.3 – Definição de ângulo plano (a) e ângulo sólido (b).

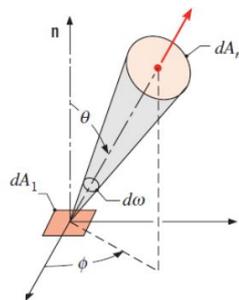


Figura 5.4 – Representação da intensidade de radiação emitida na direção (θ, ϕ) .

Assim, num sistema de coordenadas 3D (ver Figura 5.4), a intensidade de radiação pode definir-se matematicamente como:

$$i(\theta, \phi) = \frac{d\dot{Q}}{dA_n d\omega} = \frac{d\dot{Q}}{dA_1 \cos \theta d\omega} \quad (5.4)$$

e quantifica-se em $\text{W}/\text{m}^2/\text{sr}$. Pode também falar-se de uma intensidade de radiação espectral, correspondente à intensidade num dado comprimento de onda.

Podemos relacionar o poder emissivo com a intensidade de radiação. Se para uma dada superfície plana fizermos variar θ entre 0 e $\pi/2$, e ϕ entre 0 e 2π – ver Figura 5.4 – e se a intensidade de radiação for constante (igual em todas as direções) obtém-se

$$\dot{q}_{em} = \pi i_{em} \quad (5.5)$$

As superfícies cuja intensidade de radiação é independente da direção (constante) são designadas por superfícies difusas. O corpo negro é também difuso, pelo que, associando as equações (5.1) e (5.5), se pode obter a intensidade de radiação em função da temperatura do corpo.

Também se pode falar de intensidade de radiação incidente (recebida) numa dada superfície. Ela representa a potência radiativa recebida por unidade de área e unidade de ângulo sólido associadas à direção considerada. Sendo constante em todas as direções, também se verifica uma relação análoga a (5.5) para a irradiação (potência incidente por unidade de área da superfície):

$$\dot{q}_{inc} = \pi i_{inc} \quad (5.6)$$

5.3 Propriedades radiativas dos corpos reais

As propriedades radiativas dos corpos reais traduzem o seu comportamento relativamente à emissão de radiação, e à receção de radiação (absorção, reflexão ou transmissão). No que diz respeito à emissão e absorção, as propriedades dos corpos reais são referidas ao corpo padrão, o corpo negro.

A propriedade que compara a capacidade de um corpo emitir radiação com um corpo negro é chamada emissividade. A emissividade de um corpo negro é igual a 1. A emissividade também pode variar com o comprimento de onda (valores espectrais) e com a direção (valores direcionais). O poder emissivo de um corpo real é então igual ao produto da sua emissividade pelo poder emissivo do corpo negro, à mesma temperatura. Assim

$$\dot{q}_{em} = \varepsilon \dot{q}_{em,CN} \quad (5.7)$$

Se a emissividade (espectral) do corpo for constante para todos os comprimentos de onda dizemos que se trata de um corpo cinzento, ou superfície cinzenta. Se variar com o comprimento de onda podemos calcular a emissividade total a partir da sua variação espectral:

$$\varepsilon_{tot} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda} \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda}{\int_0^{\infty} \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda} \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda}{\dot{q}_{em,CN}} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda} \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda}{\sigma T^4} \quad (5.8)$$

A emissividade total é portanto a média pesada dos valores espectrais, sendo o peso o poder emissivo do corpo negro em cada comprimento de onda. Se a variação espectral da emissividade se puder aproximar a vários intervalos com valores constantes, podemos usar as frações F vistas atrás para efetuar o cálculo da emissividade total, como se verá em exemplos em 5.6.

Os corpos/materiais que têm emissividade variável com o comprimento de onda, nomeadamente privilegiando (em termos de emissão) alguns valores de λ , são designados por seletivos. Há revestimentos superficiais, como a tinta preta normal, que têm um comportamento de superfície cinzenta (ε_{λ} elevada e constante), e outros, como a tinta branca, que têm um comportamento seletivo (ε_{λ} baixa para os menores comprimentos de onda, e bastante mais alta para os maiores comprimentos de onda).

A emissividade também pode variar com a direção do espaço considerada. Fala-se assim de uma emissividade direcional ($\varepsilon_{\theta,\phi}$) e de uma emissividade hemisférica, que representa a média para todas as direções do espaço. Considerando as coordenadas da Figura 5.4, podemos escrever

$$\varepsilon_{hem} = \frac{\int_{\phi} \int_{\theta} \varepsilon_{\theta,\phi} \dot{q}_{em,CN,\theta,\phi} d\theta d\phi}{\int_{\phi} \int_{\theta} \dot{q}_{em,CN,\theta,\phi} d\theta d\phi} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \varepsilon_{\theta,\phi} i_{em,CN} \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi}{\pi i_{em,CN}} \quad (5.9)$$

Note-se que se um corpo for difuso, ou seja, com intensidade de radiação emitida igual em todas as direções, ele também tem emissividade direcional constante, porque um corpo negro é difuso, e portanto a razão entre a intensidade de radiação do corpo e a do corpo negro (igual à emissividade) também é constante.

Na maioria das superfícies a variação com o ângulo ϕ é desprezável, pelo que se pode escrever:

$$\varepsilon_{hem} = 2 \int_0^{\pi/2} \varepsilon_{\theta} \cos\theta \sin\theta d\theta \quad (5.10)$$

Quanto à variação da emissividade com o ângulo θ , ela depende da natureza do material/revestimento. Na maioria dos casos é razoável considerar a emissividade hemisférica igual à emissividade na normal à superfície ($\theta = 0^\circ$), em especial nos materiais não condutores.

Em relação à radiação térmica que um corpo recebe, há que distinguir os corpos opacos e os semitransparentes (ou translúcidos), como os vidros e alguns plásticos. Um corpo opaco pode absorver ou refletir a radiação que nele incide. A fração da radiação incidente que é absorvida é designada por coeficiente de absorção (α), e a fração refletida é designada por coeficiente de reflexão (ρ). A soma das duas frações é igual a 1 (igual ao total de radiação incidente). Os coeficientes de absorção e reflexão também podem variar com o comprimento de onda da radiação incidente e com a sua direção. Tal como a emissividade, dependem do estado/revestimento superficial, mais do que do material em si. Quando a superfície é seletiva, o coeficiente de absorção varia, sendo maior em certos comprimentos de onda. Por exemplo, existem revestimentos seletivos para coletores solares, como o dióxido de titânio, que têm um elevado coeficiente de absorção (quase igual a 1) para os comprimentos de onda mais energéticos da radiação solar, e muito baixo para a radiação de comprimentos de onda longos.

Num corpo semitransparente, além da absorção e da reflexão da radiação incidente, uma parte desta atravessa o corpo, sendo a fração correspondente chamada coeficiente de transmissão. Nesses casos:

$$\alpha + \rho + \tau = 1 \tag{5.11}$$

Esta relação pode aplicar-se para os valores totais e espectrais (para um dado comprimento de onda), uma vez que a reflexão e a transmissão não alteram os comprimentos de onda da radiação incidente. Os corpos semitransparentes têm um comportamento seletivo típico. Como mostra a Figura 5.5, um vidro claro normal deixa passar 80 a 90% da radiação solar incidente (quase toda situada nos comprimentos de onda entre 0,35 e 3 μm), mas é opaco para os comprimentos de onda mais longos. Tal implica que a radiação emitida por corpos à temperatura ambiente não atravessa os vidros, o que dá origem ao chamado efeito de estufa.

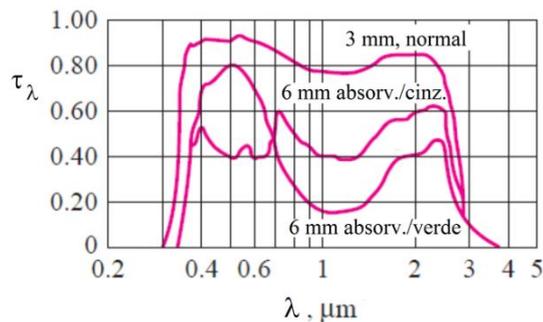


Figura 5.5 – Coeficiente de transmissão espectral para vidros.

Sob certas condições, podemos relacionar a emissividade com o coeficiente de absorção. Se considerarmos 2 corpos em equilíbrio térmico, um muito pequeno, no interior de outro muito grande, separados pelo vácuo e portanto trocando calor apenas por radiação, podemos concluir que, para estarem à mesma temperatura, o coeficiente de absorção do corpo pequeno tem de ser igual à sua emissividade – o que traduz a chamada lei de Kirchoff. Assim, a emissividade (total e hemisférica) de um corpo a uma dada temperatura é igual ao seu coeficiente de absorção (total e hemisférico) para a radiação incidente proveniente da mesma temperatura. No entanto, se a radiação incidente vier de um corpo a temperatura diferente e a emissividade variar com o comprimento de onda, como a temperaturas diferentes correspondem distribuições espectrais da

radiação diferentes, a emissividade total pode ser diferente. A emissividade total hemisférica será igual ao coeficiente de absorção total hemisférico se ambos os corpos forem cinzentos e difusos (propriedades constantes com o comprimento de onda e a direção).

5.4 Radiosidade, irradiação e fator de visão

Quando há trocas de radiação entre superfícies, é útil agrupar toda a radiação que sai de uma superfície numa única grandeza. Assim, define-se a radiosidade de uma superfície como o fluxo radiativo que sai de uma superfície opaca, incluindo o fluxo emitido (poder emissivo) e o fluxo refletido. Ou seja:

$$\dot{q}_{radios} = \dot{q}_{em} + \dot{q}_{ref} = \varepsilon \sigma T^4 + \rho \dot{q}_{inc} \quad (5.12)$$

Para expressar a radiação que sai de uma superfície e chega a outra, quaisquer que sejam as suas posições relativas, consideremos 2 superfícies de área elementar – dA_1 que envia radiação, emitida e refletida, e dA_2 que a recebe (ver Figura 5.6).

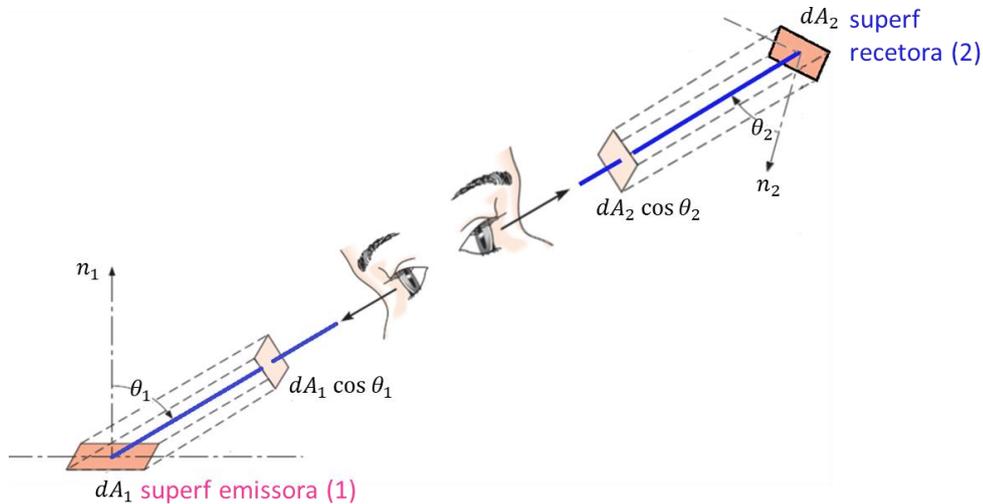


Figura 5.6 – Representação da radiação que sai de uma superfície elementar numa dada direção e chega a outra.

Considerando as 2 superfícies à distância r entre si, podemos escrever o fluxo radiativo em 2, proveniente de 1, usando a intensidade de radiação de 1 na direção de 2 igual a i_1 , e recorrendo à equação (5.4):

$$d\dot{Q}_{inc,2} = i_1 dA_1 \cos \theta_1 d\omega = i_1 dA_1 \cos \theta_1 \frac{dA_2 \cos \theta_2}{r^2} = i_1 \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2} dA_1 dA_2 \quad (5.13)$$

Se as superfícies não forem infinitesimais, mas finitas, temos:

$$\dot{Q}_{inc,2} = \int_{A_2} \int_{A_1} i_1 \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2} dA_1 dA_2 \quad (5.14)$$

Se i_1 for a intensidade da radiosidade, ou seja, se incluir a radiação emitida e a refletida por 1, e se a superfície 1 for difusa quanto à emissão e reflexão, usando a relação (5.5) podemos escrever

$$\dot{Q}_{inc,2} = \frac{\dot{q}_{radios,1}}{\pi} \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{r^2} dA_1 dA_2 \quad (5.15)$$

A fração da radiação que sai de 1 e vai incidir em 2 é:

$$F_{1-2} = \frac{\dot{Q}_{inc,2}}{\dot{q}_{radios,1}A_1} = \frac{1}{A_1} \int_{A_2} \int_{A_1} \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\pi r^2} dA_1 dA_2 \quad (5.16)$$

Esta fração é meramente geométrica – depende apenas das dimensões e posições relativas das 2 superfícies – designando-se por fator de visão ou fator de forma.

Note-se que ao escrever a fração da radiação que sai de 2 e incide em 1 chegaremos à conclusão de que

$$A_2 F_{2-1} = A_1 F_{1-2} \quad (5.17)$$

O cálculo do fator de visão exige a avaliação dos integrais complexos em (5.16). De modo a facilitar o cálculo, existem expressões e gráficos para algumas geometrias correntes – Figuras 5.7 a 5.11. A utilização dessa informação em conjunto com alguns princípios permite calcular os fatores em muitos problemas práticos, como se poderá ver na secção 5.6.

O primeiro princípio é chamado princípio da reciprocidade, e está expresso na equação (5.17). Assim, conhecendo o fator de visão de uma superfície para outra, facilmente se calcula o seu recíproco. O segundo princípio é o da simetria: utilizando planos de simetria pode concluir-se que fatores simétricos são iguais. O terceiro princípio é o da soma, e diz que o somatório de todos os fatores de visão de uma superfície para o seu exterior é igual a 1 (toda a energia que sai da superfície é igual a 100%). O quarto princípio é o da sobreposição, que permite agrupar fatores parciais; pode traduzir-se por

$$F_{1-(2+3)} = F_{1-2} + F_{1-3} \quad (5.18)$$

Note-se que nalguns casos existe fator de visão de uma superfície para ela própria, o que acontece em superfícies côncavas.

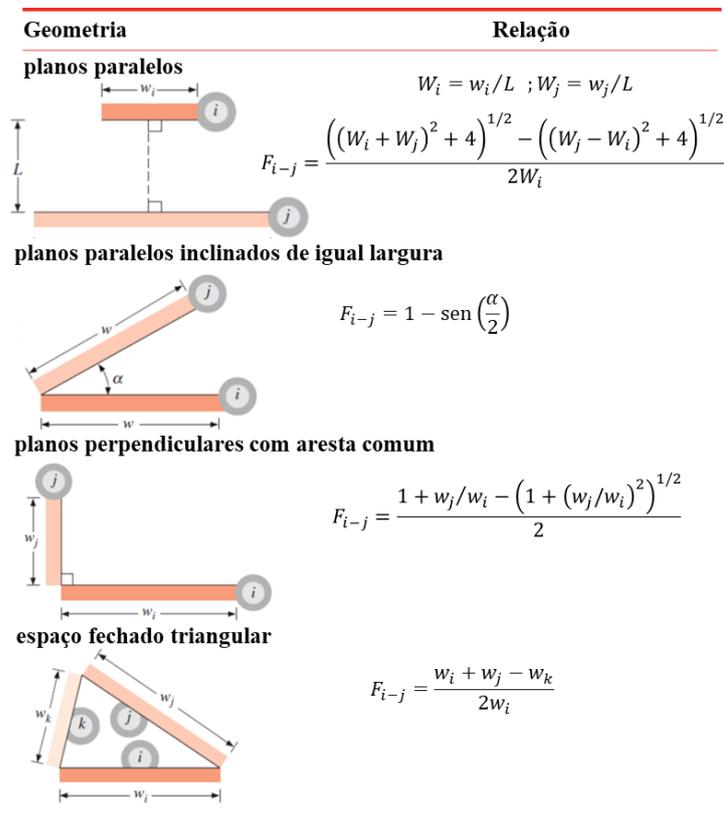


Figura 5.7 – Fatores de visão para várias superfícies planas de comprimento infinito.

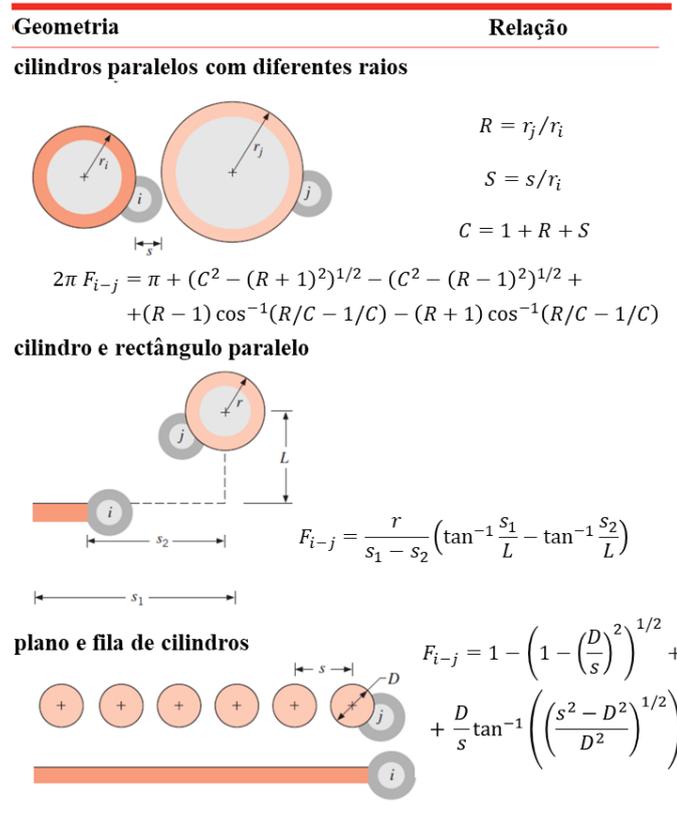


Figura 5.8 – Fatores de visão para várias superfícies cilíndricas de comprimento infinito.

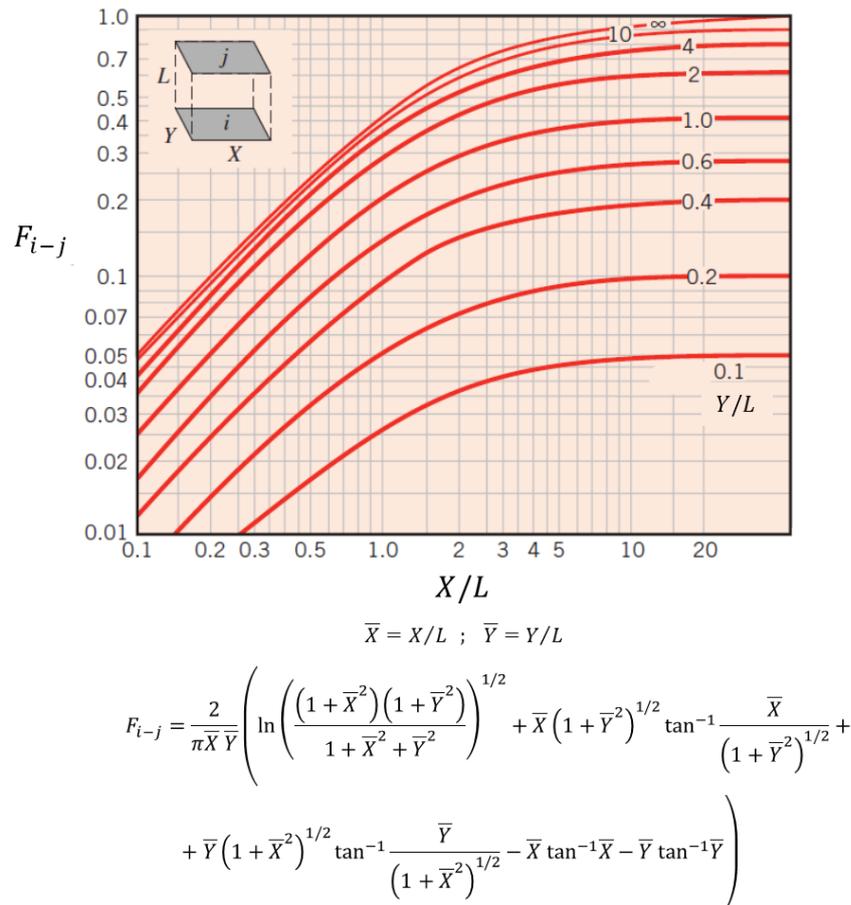
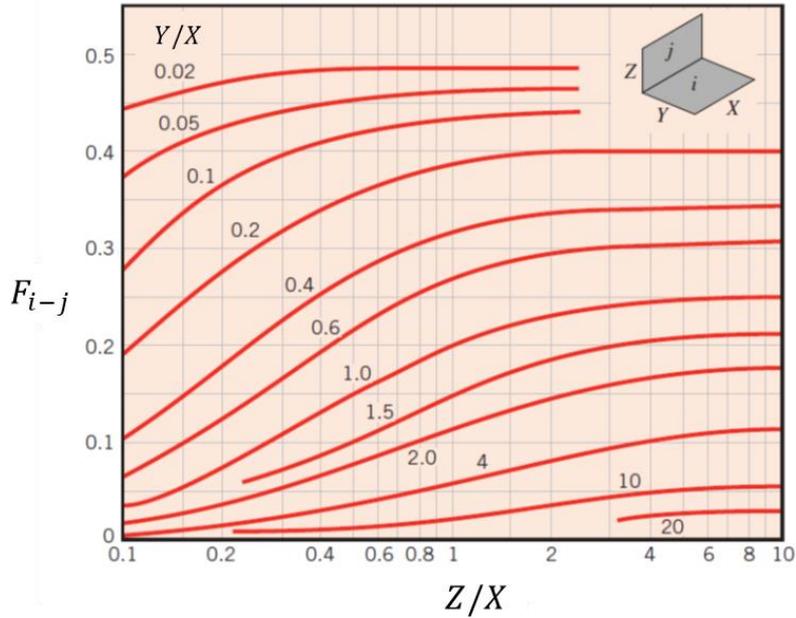


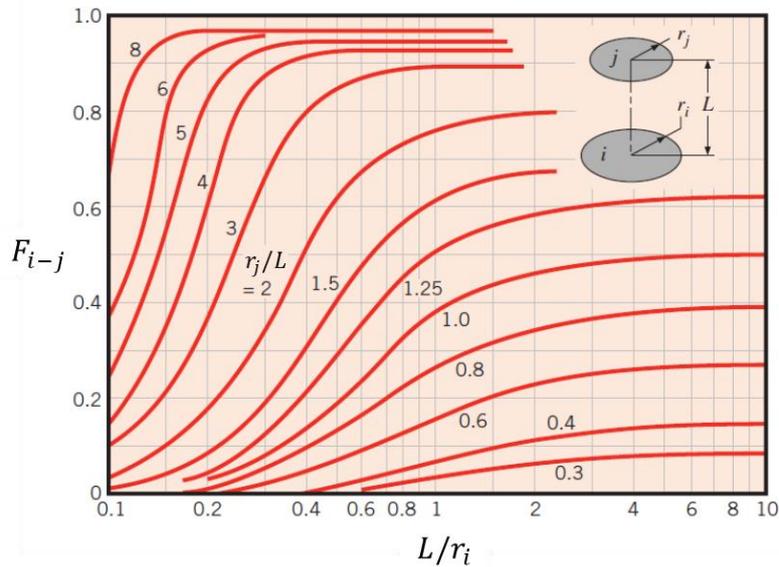
Figura 5.9 – Fator de visão para planos paralelos alinhados.



$$H = Z/X ; W = Y/X$$

$$F_{i-j} = \frac{1}{\pi W} \left(W \tan^{-1} \frac{1}{W} + H \tan^{-1} \frac{1}{H} - (H^2 + W^2)^{1/2} W \tan^{-1} \frac{1}{(H^2 + W^2)^{1/2}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{(1 + W^2)(1 + H^2)}{1 + W^2 + H^2} \left(\frac{W^2(1 + W^2 + H^2)}{(1 + W^2)(W^2 + H^2)} \right)^{W^2} \left(\frac{H^2(1 + W^2 + H^2)}{(1 + H^2)(W^2 + H^2)} \right)^{H^2} \right) \right)$$

Figura 5.10 – Fator de visão para planos perpendiculares com uma aresta comum.



$$R_i = r_i/L ; R_j = r_j/L$$

$$S = 1 + \frac{1 + R_j^2}{R_i^2}$$

$$F_{i-j} = \frac{1}{2} \left(S - \left(S^2 - 4(R_j/r_i)^2 \right)^{1/2} \right)$$

Figura 5.11 – Fator de visão para discos paralelos coaxiais.

5.5 Trocas de radiação entre superfícies cinzentas e difusas em meio não participante

Aborda-se em primeiro lugar a troca de radiação térmica entre um número qualquer de superfícies formando um volume fechado. De seguida, é abordado de forma particular o caso de 2 superfícies apenas. Em todos os casos as superfícies são cinzentas e difusas, e o meio que as separa não interfere na radiação trocada.

5.5.1 Trocas entre N superfícies formando um volume fechado

O conceito de radiosidade é particularmente útil para quantificar as trocas de radiação entre superfícies. Se considerarmos N superfícies formando um volume fechado, vamos identificar a superfície genérica com o índice i , e uma outra superfície genérica, com a qual i troca calor, com o índice j , como representa a Figura 5.12.

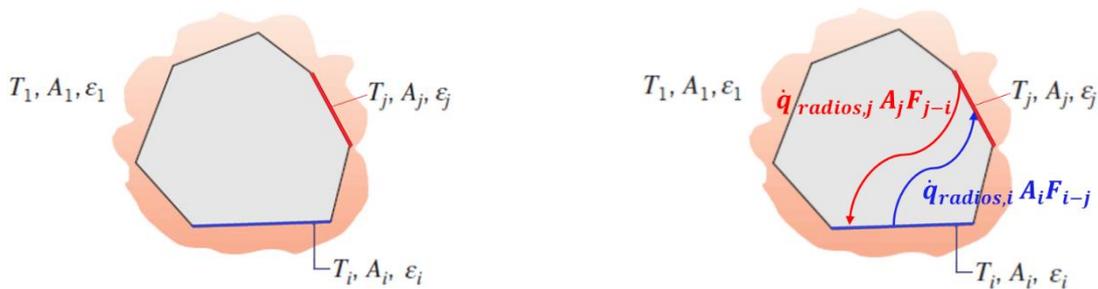


Figura 5.12 – Superfícies de um volume fechado e trocas de radiação entre 2 superfícies genéricas.

Relembrando a equação (5.12), a radiosidade da superfície genérica i é

$$\dot{q}_{radios,i} = \epsilon_i \sigma T_i^4 + \rho_i \dot{q}_{inc,i} = \epsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \epsilon_i) \dot{q}_{inc,i} \quad (5.19)$$

sendo a irradiação em i o fluxo que resulta da radiação que sai das outras superfícies e chega a i , o que permite escrever

$$\begin{aligned} \dot{q}_{radios,i} &= \epsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \epsilon_i) \sum_{j=1}^N (\dot{q}_{radios,j} A_j F_{j-i}) / A_i = \\ &= \epsilon_i \sigma T_i^4 + (1 - \epsilon_i) \sum_{j=1}^N (\dot{q}_{radios,j} F_{i-j}) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Note-se que o somatório para as N superfícies pode incluir a própria superfície i , desde que esta seja côncava e exista (seja diferente de 0) o fator F_{i-i} .

O balanço radiativo de cada superfície (i), para todas as trocas no volume fechado, será:

$$\dot{q}_{rad,i} = \dot{q}_{inc,i} - \dot{q}_{radios,i} = \sum_{j=1}^N (\dot{q}_{radios,j} F_{i-j}) - \dot{q}_{radios,i} \quad (5.21)$$

Assim, se conhecermos as N temperaturas das N superfícies, podemos calcular as N radiosidades com um sistema de equações semelhantes à equação (5.20). A partir das radiosidades podemos calcular os balanços energéticos de cada superfície – equação (5.21).

No caso de não ser conhecida a temperatura de alguma superfície, conhecendo o seu balanço global, que inclui as trocas do lado exterior ao volume fechado, pode usar-se a equação de balanço – equação (5.21) – para substituir a equação de radiosidade no sistema de equações. Após o cálculo da radiosidade pode obter-se a temperatura da superfície da equação (5.20).

Nos casos em que o volume é composto por menos de 4 superfícies (3 ou 2) é possível utilizar um esquema de resistências de radiação para representar o problema.

Podemos usar a equação (5.19) para expressar a irradiação na superfície i :

$$\dot{q}_{inc,i} = \frac{\dot{q}_{radios,i} - \varepsilon_i \sigma T_i^4}{1 - \varepsilon_i} \quad (5.22)$$

equação que substituída na equação de balanço dá

$$\dot{Q}_{rad,i} = \dot{q}_{inc,i} - \dot{q}_{radios,i} = \frac{\varepsilon_i}{1 - \varepsilon_i} (\dot{q}_{radios,i} - \sigma T_i^4) \quad (5.23)$$

Este balanço pode ser analisado como uma diferença de potencial (a radiosidade menos o poder emissivo de um corpo negro à mesma temperatura) a dividir por uma resistência superficial:

$$\dot{Q}_{rad,i} = \frac{\dot{q}_{radios,i} - \sigma T_i^4}{\frac{1 - \varepsilon_i}{A_i \varepsilon_i}} = \frac{\dot{q}_{radios,i} - \sigma T_i^4}{R_{sup,i}} \quad (5.24)$$

Esta resistência superficial traduz a diferença do comportamento da superfície em relação a um corpo negro. Se a superfície for negra a resistência é igual a zero e a radiosidade igual à do corpo negro (igual ao seu poder emissivo).

Quanto às trocas de radiação entre 2 superfícies quaisquer (i e j), como representadas na Figura 5.12, pode escrever-se

$$\dot{Q}_{rad,i-j} = A_i F_{i-j} (\dot{q}_{radios,j} - \dot{q}_{radios,i}) = \frac{\dot{q}_{radios,j} - \dot{q}_{radios,i}}{\frac{1}{A_i F_{i-j}}} = \frac{\dot{q}_{radios,j} - \dot{q}_{radios,i}}{R_{esp,i-j}} \quad (5.25)$$

representando $R_{esp,i-j}$ uma resistência espacial (geométrica) entre ambas as superfícies.

A Figura 5.13 representa as resistências associadas à superfície i . O balanço das trocas (superficial) equivale à soma dos balanços das trocas (espaciais) entre cada 2 superfícies.

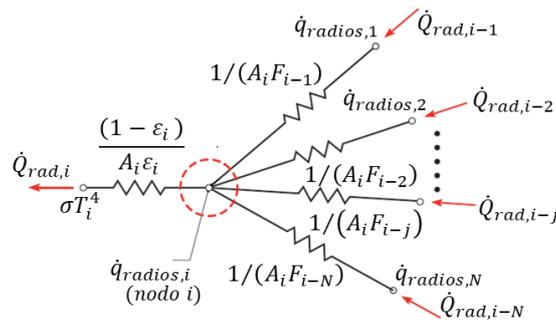


Figura 5.13 – Resistências de radiação associadas ao nodo (superfície) i .

A Figura 5.14 representa o esquema de resistências para um volume fechado formado por 3 superfícies. Esse caso pode ser ainda mais simplificado, permitindo a obtenção de uma única resistência equivalente a todas, se uma das superfícies for isolada termicamente do lado exterior ao volume fechado. Essa superfície é designada por superfície re-radiante. Sendo o seu balanço igual a zero, resulta da equação (5.24) que a sua radiosidade é igual à de um corpo negro. Ou seja, mesmo com emissividade diferente de 1, a soma da radiação emitida e refletida por uma tal superfície iguala a radiosidade (poder emissivo) de um corpo negro à mesma temperatura. Assim, a sua resistência superficial é também igual a zero.

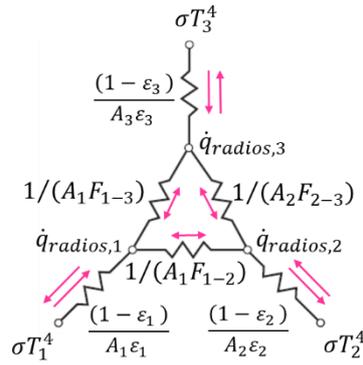


Figura 5.14 – Esquema de resistências de radiação para um volume fechado com 3 superfícies.

5.5.2 Trocas entre 2 superfícies formando um volume fechado

O caso de um volume fechado composto por apenas 2 superfícies ocorre muitas vezes na prática, normalmente por simplificação da realidade, associando superfícies individuais que estão à mesma temperatura e têm propriedades idênticas.

Usando o esquema de resistências visto atrás, para o caso de 2 superfícies teremos a representação da Figura 5.15.

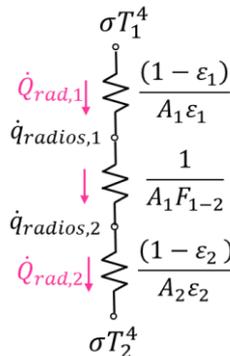


Figura 5.15 – Esquema resistências de radiação para um volume fechado com 2 superfícies.

Neste caso teremos um balanço global (assumindo que T_1 é maior que T_2):

$$\dot{Q}_{rad,2} = -\dot{Q}_{rad,1} = \dot{Q}_{1-2} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1} + \frac{1}{A_1 F_{1-2}} + \frac{1-\varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2}} = \frac{A_1 \sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} - 1 + \frac{1}{F_{1-2}} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \quad (5.26)$$

Há vários casos particulares desta equação. No caso de 2 planos paralelos e infinitos (na prática de dimensões muito maiores que a distância entre eles), sendo $A_1 = A_2$ e $F_{1-2} = 1$, vem

$$\dot{Q}_{1-2} = \frac{A_1 \sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (5.27)$$

No caso de uma superfície (1) muito maior do que a outra (2), sendo $A_1 \ll A_2$ e $F_{1-2} = 1$, vem

$$\dot{Q}_{1-2} = \varepsilon_1 A_1 \sigma(T_1^4 - T_2^4) \quad (5.28)$$

que mostra que o balanço radiativo não depende da emissividade da superfície maior.

Um dos casos típicos em que se consideram 2 superfícies é o de um corpo trocando radiação com comprimentos de onda longos apenas com a atmosfera. Para esse efeito, a atmosfera pode considerar-se como uma superfície de área muito maior do que a do corpo, podendo utilizar-se a equação (5.28). A temperatura a considerar para a atmosfera depende da humidade do ar, e da nebulosidade. Há 2 equações simplificadas para calcular a temperatura da atmosfera, relacionada com a temperatura do ar ambiente: uma em condições de céu muito nublado:

$$T_{atm} = T_{ar} - 6 \quad (5.29)$$

e outra em condições de céu limpo:

$$T_{atm} = 0,0552 T_{ar}^{1,5} \quad (\text{com } T \text{ em K}) \quad (5.30)$$

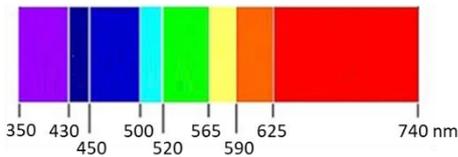
Verifica-se que no caso de céu limpo a temperatura da atmosfera pode ser bastante inferior à do ar ambiente. O problema P6.3 mostra o efeito desta temperatura nas trocas de calor de uma superfície.

Os corpos expostos ao ambiente exterior também recebem, no período diurno, radiação de comprimentos de onda mais baixos: a radiação solar. Para tratar a radiação solar recebida recorre-se normalmente a valores medidos (em W/m^2), para uma dada direção dos raios solares incidentes na superfície. Na secção seguinte tratam-se alguns casos em que intervém a radiação solar incidente.

5.6 Problemas práticos resolvidos (P5.1 a P5.18)

Os problemas que se seguem são especificamente dedicados ao modo da radiação térmica. No capítulo 6 são apresentados outros problemas práticos envolvendo radiação, mas em que simultaneamente ocorrem outros modos de transferência de calor, quer em regime permanente, quer em regime instacionário.

P5.1



A figura ao lado representa o espectro visível da radiação solar. Calcule a percentagem de energia emitida pelo sol em cada uma das cores identificadas. O sol pode ser considerado, em termos de distribuição espectral da radiação, um corpo negro a 5800 K.

Resolução e discussão

Usando a informação da Tabela 5.1 e a equação (5.3) podem calcular-se as frações de energia radiante para cada intervalo de comprimentos de onda (cor). Assim, para o vermelho teremos

$$F(\text{vermelho}) = F_{0-0,740 \mu\text{m}}(5800 \text{ K}) - F_{0-0,625 \mu\text{m}}(5800 \text{ K}) = F_{\lambda T=4292} - F_{\lambda T=3625} = 0,52550 - 0,40261 = 0,123$$

$$F(\text{laranja}) = F_{0-0,625 \mu\text{m}}(5800 \text{ K}) - F_{0-0,590 \mu\text{m}}(5800 \text{ K}) = F_{\lambda T=3625} - F_{\lambda T=3422} = 0,40261 - 0,36007 = 0,043$$

$$F(\text{amarelo}) = F_{0-0,590 \mu\text{m}}(5800 \text{ K}) - F_{0-0,565 \mu\text{m}}(5800 \text{ K}) = F_{\lambda T=3422} - F_{\lambda T=3277} = 0,36007 - 0,32886 = 0,031$$

$$F(\text{verde}) = F_{0-0,565 \mu\text{m}}(5800 \text{ K}) - F_{0-0,520 \mu\text{m}}(5800 \text{ K}) = F_{\lambda T=3277} - F_{\lambda T=3016} = 0,32886 - 0,27181 = 0,057$$

$$F(\text{ciano}) = F_{0-0,520 \mu\text{m}}(5800 \text{ K}) - F_{0-0,500 \mu\text{m}}(5800 \text{ K}) = F_{\lambda T=3016} - F_{\lambda T=2900} = 0,27181 - 0,24638 = 0,025$$

$$F(\text{azul claro}) = F_{0-0,500 \mu\text{m}}(5800 \text{ K}) - F_{0-0,450 \mu\text{m}}(5800 \text{ K}) = F_{\lambda T=2900} - F_{\lambda T=2610} = 0,24638 - 0,18362 = 0,063$$

$$F(\text{azul}) = F_{0-0,450 \mu\text{m}}(5800 \text{ K}) - F_{0-0,430 \mu\text{m}}(5800 \text{ K}) = F_{\lambda T=2610} - F_{\lambda T=2494} = 0,18362 - 0,15915 = 0,024$$

$$F(\text{violeta}) = F_{0-0,430 \mu\text{m}}(5800 \text{ K}) - F_{0-0,350 \mu\text{m}}(5800 \text{ K}) = F_{\lambda T=2494} - F_{\lambda T=2030} = 0,15915 - 0,06792 = 0,091$$

Foi usada interpolação do 3º grau para cálculo dos valores intermédios.

A máxima intensidade espectral verifica-se para

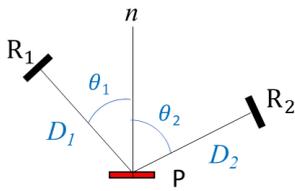
$$\lambda_{\text{max}} T = 2897,8 \Rightarrow \lambda_{\text{max}} = 0,500 \mu\text{m}$$

ou seja, entre o azul e o ciano (azul claro).

O intervalo/cor a que corresponde uma maior quantidade de energia radiante é o vermelho, que também é o maior intervalo, com 12,3% do total de radiação, seguido do violeta com 9,1% do total.

A radiação na zona visível corresponde a cerca de 46% do total de radiação solar.

P5.2



A superfície P é um painel radiante com características de um emissor difuso. Avalie o efeito da distância D e da posição relativa (θ) de uma superfície recetora (R), na percentagem da radiação recebida do painel, relativamente ao máximo possível.

Considere que as dimensões das superfícies são muito menores que a distância que as separa.

Resolução e discussão

Vamos considerar que as superfícies P e R são quase infinitesimais. Assim, a sua área é uma área elementar, e D e θ não variam com o ponto da superfície considerado. Desse modo, podemos escrever a potência radiativa recebida por R, a partir da que sai de P, recorrendo à definição de intensidade de radiação (de P) e ângulo sólido – equação (5.13):

$$\dot{Q}_{inc,R} = i_P A_P \cos \theta \omega_{P-R} = i_P A_P \cos \theta \frac{A_R}{D^2} = i_P A_P A_R \frac{\cos \theta}{D^2}$$

Esta equação expressa que a radiação recebida é máxima quando $\theta = 0^\circ$, aumentando com a proximidade a P (menor D). Note-se no entanto que se D for muito reduzida a hipótese de superfícies com dimensões pequenas face a D passa a não ser válida.

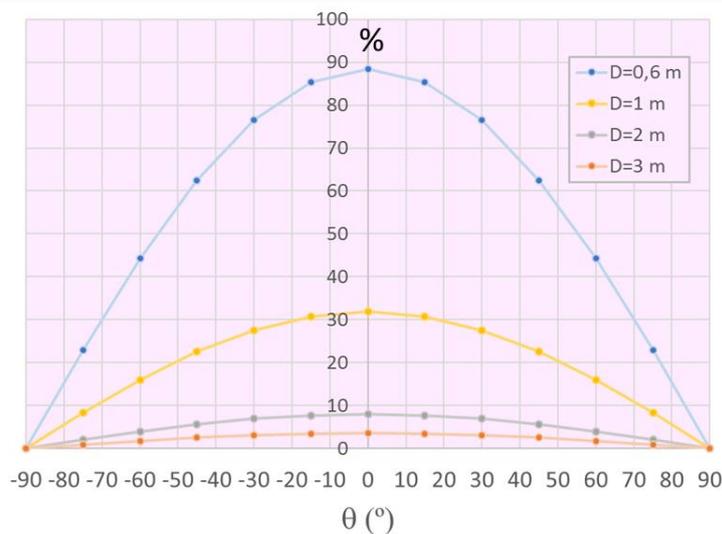
A potência radiativa que sai de P em todas as direções é (sendo P difusa):

$$\dot{Q}_{sai,P} = \pi i_P A_P$$

que será igual ao máximo (ideal) que R poderia receber de P. O quociente entre ambas as potências, para uma área A_R unitária, será:

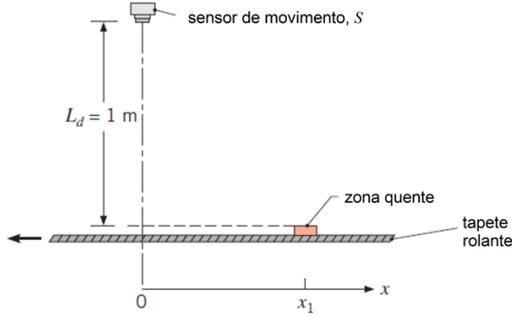
$$\frac{\dot{Q}_{inc,R}}{\dot{Q}_{sai,P}} = \frac{\cos \theta}{\pi D^2}$$

O gráfico seguinte representa este quociente em percentagem, para distâncias entre 0,6 e 3 m.



A percentagem recebida aumenta inversamente com o quadrado da distância, pelo que uma redução da distância para metade aumenta 4 vezes a radiação recebida. O afastamento (em ângulo) da normal reduz a radiação recebida, que é zero para a direção tangencial ($\theta = 90^\circ$).

P5.3



Um sensor infravermelho de movimento (S) deve assinalar a aproximação de uma peça quente a 100°C, com uma área de 100 cm², quando esta está a uma distância $x_1 = 0,5$ m.

Considerando que a superfície da peça tem um comportamento de corpo negro, qual será a irradiação no sensor a partir da qual deve actuar o seu sinal de saída?

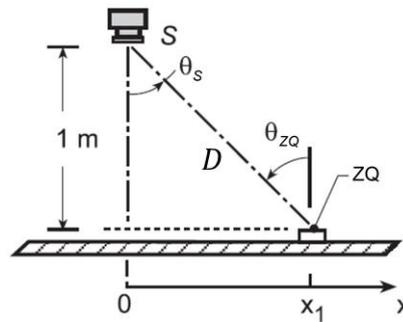
Considere que as dimensões das superfícies do sensor e da peça são muito menores que a distância que as separa.

Resolução e discussão

Sendo a superfície da peça quente um corpo negro, podemos calcular a intensidade de radiação que ela emite. Das equações (5.1) e (5.5):

$$\dot{q}_{em,CN}(T) = \sigma T^4 = \pi i \quad \Rightarrow \quad i_{ZQ} = \frac{\sigma T^4}{\pi} = \frac{5,670 \times 10^{-8} \times 373,15^4}{\pi} = 350 \text{ W/m}^2\text{sr}$$

Vamos recorrer à geometria representada na figura seguinte



e expressar a potência emitida pela peça quente (ZQ) que chega ao sensor (S):

$$\dot{Q}_{ZQ-S} = i_{ZQ} A_{ZQ} \cos \theta_{ZQ} \omega_{ZQ-S} = i_{ZQ} A_{ZQ} \cos \theta_{ZQ} \frac{A_S \cos \theta_S}{D^2}$$

considerando as áreas em causa muito pequenas face a D .

D é facilmente calculável pela figura acima, assim como θ_{ZQ} :

$$D = \sqrt{(1^2 + 0,5^2)} = 1,118 \text{ m}$$

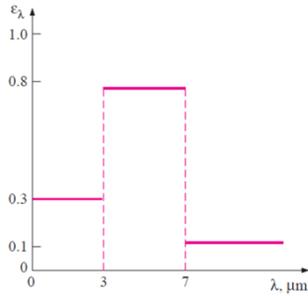
$$\cos \theta_{ZQ} = \cos \theta_S = \frac{1}{D} = 0,894$$

vindo então

$$\dot{q}_{inc,S} = \dot{Q}_{ZQ-S} / A_S = 350 \times 0,01 \times 0,894 \times \frac{0,894}{1,118^2} = 2,2 \text{ W/m}^2$$

A partir deste valor de irradiação o sensor deverá permitir sinalizar a proximidade da peça. Note-se que se a sinalização passar a ser dada para metade da distância ($x_1 = 0,25$ m), a irradiação correspondente passará a ser de 3,1 W/m², valor superior pelas reduções de θ_S e de D .

P5.4



A emissividade hemisférica espectral de uma superfície foi medida a 800 K, e pode ser aproximada pelo gráfico ao lado.

Calcule a sua emissividade total hemisférica e o poder emissivo.

Resolução e discussão

Trata-se de uma superfície com um comportamento seletivo (não cinzenta). A sua emissividade total corresponde à média das emissividades espectrais. Mas essa média tem de ser pesada com a radiação efetivamente emitida nos vários comprimentos de onda, o que depende da temperatura em causa.

A partir da definição de emissividade, e dividindo em 3 intervalos de acordo com o gráfico:

$$\varepsilon(T) = \frac{\dot{q}_{em}(T)}{\dot{q}_{em,CN}(T)} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda} \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda}{\int_0^{\infty} \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda} = \frac{\varepsilon_1 \int_0^{\lambda_1} \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda}{\int_0^{\infty} \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda} + \frac{\varepsilon_2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda}{\int_0^{\infty} \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda} + \frac{\varepsilon_3 \int_{\lambda_2}^{\infty} \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda}{\int_0^{\infty} \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \varepsilon(T) &= \varepsilon_1 \cdot F_{0-\lambda_1}(T) + \varepsilon_2 \cdot F_{\lambda_1-\lambda_2}(T) + \varepsilon_3 \cdot F_{\lambda_2-\infty}(T) = \\ &= 0,3 \times F_{0-3}(800 \text{ K}) + 0,8 \times F_{3-7}(800 \text{ K}) + 0,1 \times F_{7-\infty}(800 \text{ K}) \end{aligned}$$

As frações para o corpo negro obtêm-se a partir da Tabela 5.1:

$$F_{0-3}(800 \text{ K}) = F(\lambda T = 2400 \text{ } \mu\text{mK}) = 0,1403$$

$$F_{3-7}(800 \text{ K}) = F(\lambda T = 5600 \text{ } \mu\text{mK}) - F_{0-3}(800 \text{ K}) = 0,7010 - 0,1403 = 0,5607$$

$$F_{7-\infty}(800 \text{ K}) = 1 - F_{0-7}(800 \text{ K}) = 1 - 0,7010 = 0,2990$$

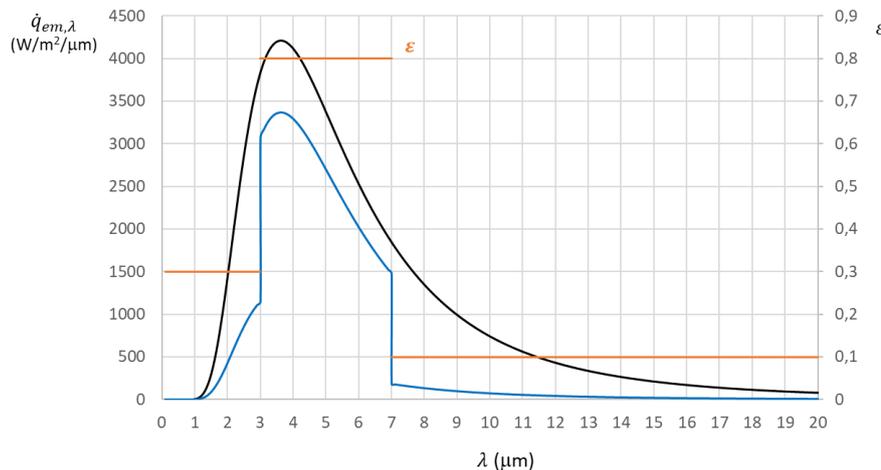
vindo então a emissividade total

$$\varepsilon(800 \text{ K}) = 0,3 \times 0,1403 + 0,8 \times 0,5607 + 0,1 \times 0,2990 = 0,521$$

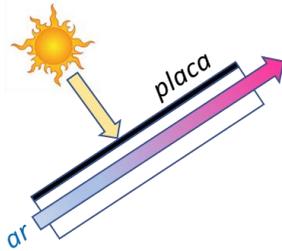
O poder emissivo é igual a

$$\dot{q}_{em}(800 \text{ K}) = \varepsilon \sigma T^4 = 0,521 \times 5,670 \times 10^{-8} \times 800^4 = 12100 \text{ W/m}^2$$

O gráfico seguinte sobrepõe o poder emissivo de um corpo negro, a emissividade e o poder emissivo da superfície, todos em termos espectrais.



P5.5



Um coletor solar a ar simples é composto por uma placa coletora com uma face exposta à radiação solar, revestida com dióxido de titânio, que tem um comportamento aproximadamente difuso, e as seguintes propriedades espectrais:

$$\varepsilon_{0-2,5 \mu\text{m}} = 0,95, \varepsilon_{\lambda > 2,5 \mu\text{m}} = 0,05.$$

A placa transfere calor para o ar que circula na face posterior, e perde calor para o exterior (ambiente), por convecção e por radiação.

Calcule os valores de α e ε totais quando a placa recebe radiação solar e se encontra a uma temperatura de 90°C . Qual o efeito do revestimento seletivo na transferência de calor para o fluido a aquecer (ar)?

Resolução e discussão

A emissividade total da placa é a média pesada das emissividades espectrais, existindo dois valores diferentes (abaixo de $2,5 \mu\text{m}$ e acima):

$$\begin{aligned} \varepsilon(T_{placa}) &= \frac{0,95 \int_0^{2,5} \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda}{\int_0^\infty \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda} + \frac{0,05 \int_{2,5}^\infty \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda}{\int_0^\infty \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda} = \\ &= 0,95 \times F_{0-2,5}(2,5 \times 363,15 \mu\text{mK}) + 0,05 \times (1 - F_{0-2,5}) \cong 0 + 0,05 \times 1 = 0,05 \end{aligned}$$

A emissividade total da placa é igual à emissividade espectral acima de $2,5 \mu\text{m}$, porque a 90°C a placa não emite radiação abaixo desse comprimento de onda.

Quanto ao coeficiente de absorção, pela lei de Kirchoff os valores espectrais são iguais aos da emissividade, isto é

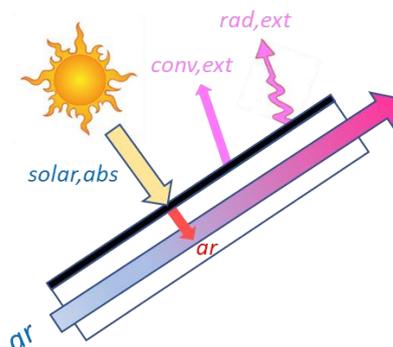
$$\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda$$

mas a radiação recebida é radiação solar proveniente de uma temperatura muito mais elevada (equivalente a um corpo negro a 5800 K), pelo que

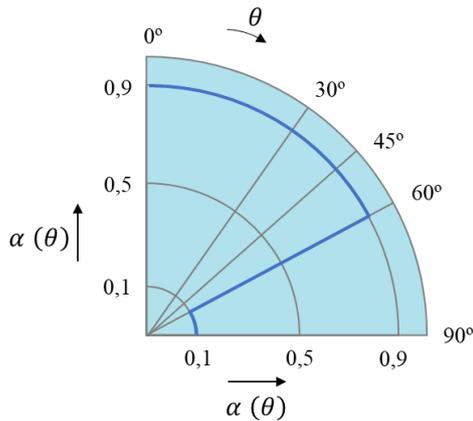
$$\begin{aligned} \alpha(T_{sol,CN}) &= 0,95 \times F_{0-2,5}(2,5 \times 5800 \mu\text{mK}) + 0,05 \times (1 - F_{0-2,5}(14500 \mu\text{mK})) \\ &= 0,95 \times 0,966 + 0,05 \times (1 - 0,966) = 0,92 \end{aligned}$$

ou seja, como quase toda a radiação solar se situa nos comprimentos de onda abaixo de $2,5 \mu\text{m}$, o coeficiente de absorção é muito elevado.

Este revestimento permite reduzir as perdas de calor por radiação para o exterior, e aumentar a temperatura da placa, o que por sua vez permite aumentar a potência calorífica recebida pelo ar (ver figura seguinte). O problema P6.11 tratará do balanço energético global de um coletor deste tipo.



P5.6



Uma superfície cinzenta tem o coeficiente de absorção direcional representado no gráfico ao lado. O coeficiente de absorção é isotrópico em relação ao ângulo circunferencial.

Calcule a emissividade total hemisférica de uma placa com essas propriedades.

Se essa placa estiver em órbita fora da atmosfera terrestre, recebendo uma irradiação solar de 1400 W/m^2 perpendicular à superfície, a que temperatura ficará? Admita a placa isolada na face posterior.

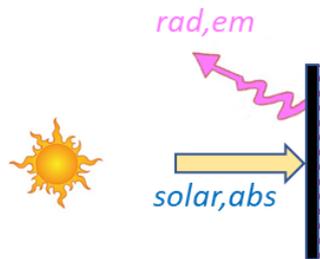
Resolução e discussão

Para calcular a emissividade hemisférica teremos de avaliar o valor médio das várias direções. Usando a equação (5.10)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{hem} &= 2 \int_0^{\pi/2} \varepsilon_{\theta} \cos \theta \sin \theta d\theta = 2 \left(\int_0^{2\pi/6} 0,9 \cos \theta \sin \theta d\theta + \int_{2\pi/6}^{\pi/2} 0,1 \cos \theta \sin \theta d\theta \right) \\ &= 2 \times \left(\frac{0,9}{2} \sin^2 \theta \Big|_0^{\pi/3} + \frac{0,1}{2} \sin^2 \theta \Big|_{\pi/3}^{\pi/2} \right) = 0,9 \times 0,75 + 0,1 \times 0,25 = 0,7 \end{aligned}$$

Note-se que os pesos dos intervalos angulares dependem, não da sua amplitude, mas da amplitude do $\sin^2 \theta$. Usando a amplitude dos intervalos a média pesada seria igual a $0,9 \times 2/3 + 0,1 \times 1/3 = 0,63$.

Se a placa se encontrar em órbita receberá a radiação solar (na perpendicular à superfície) e perderá calor por emissão de radiação para o espaço, em todas as direções. Não havendo outras fontes de calor (o espaço está a 0 K, e despreza-se qualquer radiação proveniente da Terra), a temperatura da placa resultará do equilíbrio entre esses fluxos. A figura abaixo representa-os.



A equação de balanço, em regime permanente, é então

$$\dot{q}_{inc} \alpha|_{\theta=0} = \varepsilon_{hem} \sigma T^4$$

vindo

$$T = \left(\frac{\dot{q}_{inc} \alpha|_{\theta=0}}{\varepsilon_{hem} \sigma} \right)^{1/4} = \left(\frac{1400 \times 0,9}{0,7 \times 5,670 \times 10^{-8}} \right)^{1/4} = 422,11 \text{ K} = 149 \text{ } ^\circ\text{C}$$

P5.7



O filamento de uma lâmpada de incandescência, em funcionamento normal, está a 2500 K. O bolbo de vidro da lâmpada (com 0,8 mm de espessura) tem um coeficiente de transmissão igual a 0,91 de 0,3 a 3 μm , sendo 0 para outros comprimentos de onda. O filamento (de tungstênio) tem as seguintes propriedades

$$\varepsilon_{0-1 \mu\text{m}} = 0,5, \varepsilon_{\lambda > 1 \mu\text{m}} = 0,15.$$

Em relação à radiação emitida pelo filamento, calcule a percentagem da radiação visível e a percentagem da radiação total que atravessam o bolbo de vidro.

Resolução e discussão

Temos de calcular as frações de radiação emitidas na zona de comprimentos de onda visíveis, e na zona que pode atravessar o vidro (visível e infravermelha), uma vez que o vidro é opaco a partir dos 3 μm .

Vamos começar por calcular as frações para um corpo negro (que o filamento não é), recorrendo à Tabela 5.1:

$$F_{0,35-0,74 \mu\text{m}}(2500 \text{ K}) = F_{0-0,74 \mu\text{m}} - F_{0-0,35 \mu\text{m}} = 0,045 - 0 = 0,045$$

$$F_{0,35-3 \mu\text{m}}(2500 \text{ K}) = F_{0-3 \mu\text{m}} = 0,834$$

Estes valores significam que se o filamento fosse um corpo negro, 4,5% da radiação emitida seria visível, e 83,4% estariam em condições de atravessar o vidro. Como não é negro, teremos de calcular a sua emissividade total e as frações (percentagens) em causa. A fração emitida na zona visível é dada por

$$F_{0,35-0,74 \mu\text{m}}^{fil}(2500 \text{ K}) = \frac{\int_0^{0,74} \varepsilon_{fil,\lambda} \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda - \int_0^{0,35} \varepsilon_{fil,\lambda} \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda}{\varepsilon_{fil} \sigma T^4}$$

usando o sobreíndice *fil* para distinguir a fração da fração de um corpo negro. É necessário calcular também a

$$\begin{aligned} \varepsilon_{fil} &= \frac{\varepsilon_{0-1 \mu\text{m}} \int_0^1 \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda}{\int_0^\infty \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda} + \frac{\varepsilon_{1-\infty} \int_1^\infty \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda}{\int_0^\infty \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda} = \\ &= \varepsilon_{0-1} F_{0-1}(2500 \text{ K}) + \varepsilon_{1-\infty} F_{1-\infty}(2500 \text{ K}) = \\ &= 0,5 \times 0,1617 + 0,15 \times (1 - 0,1617) = 0,2066 \end{aligned}$$

Então temos

$$F_{0,35-0,74}^{fil} = \frac{\varepsilon_{0-0,74}}{\varepsilon_{fil}} F_{0-0,74} - \frac{\varepsilon_{0-0,35}}{\varepsilon_{fil}} F_{0-0,35} = \frac{0,5}{0,2066} \times 0,045 - 0 = 0,1089$$

Desta fração (visível) emitida atravessam o vidro

$$F_{0,35-0,74}^{fil} \tau_{vidro,0,35-0,74} = 0,1089 \times 0,91 = 0,099$$

ou seja, cerca de 10% da radiação emitida.

Quanto a toda a radiação que pode atravessar o vidro, incluindo a infravermelha até 3 μm, temos a fração emitida

$$\begin{aligned}
 F_{0,35-3\mu\text{m}}^{fil}(2500\text{ K}) &= F_{0,35-0,74\mu\text{m}}^{fil} + \frac{\int_{0,74}^3 \varepsilon_{fil,\lambda} \dot{q}_{em,CN,\lambda} d\lambda}{\varepsilon_{fil} \sigma T^4} = \\
 &= F_{0,35-0,74}^{fil} + \frac{0,5}{0,2066} F_{0,74-1} + \frac{0,15}{0,2066} F_{1-3} = \\
 &= 0,1089 + \frac{0,5}{0,2066} (0,1617 - 0,045) + \frac{0,15}{0,2066} (0,834 - 0,1617) = 0,879
 \end{aligned}$$

Neste caso atravessam o vidro

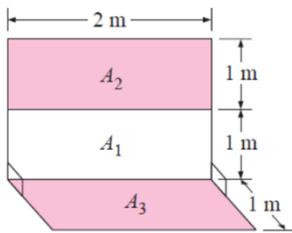
$$F_{0,35-3}^{fil} \tau_{vidro,0,35-3} = 0,879 \times 0,91 = 0,800$$

ou seja, 80% da radiação emitida.

Assim, em relação ao objetivo da lâmpada, que é o de gerar luz visível, apenas uma pequena percentagem da energia gasta cumpre esse objetivo. Devido à sua baixa eficiência este tipo de lâmpada foi já abandonado, sendo substituído por tipos mais eficientes, como as lâmpadas LED.

Em relação aos restantes 20% de radiação (100-80%) que não atravessam o bulbo, são na sua maioria absorvidos ou refletidos para o interior, aquecendo o bulbo de vidro, que também troca calor com o exterior. No problema P6.9 faz-se o balanço global desta lâmpada, permitindo calcular a temperatura atingida pelo bulbo.

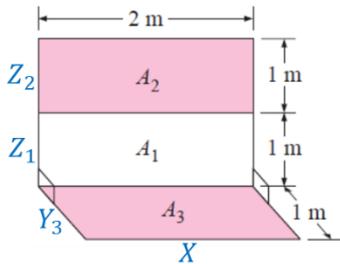
P5.8



Calcule o fator de visão da superfície 2 para a superfície 3 da figura ao lado.

Resolução e discussão

Podemos calcular os fatores de visão F_{3-1} e $F_{3-(1+2)}$ usando a expressão da Figura 5.10 (planos perpendiculares com uma aresta comum). Usando a figura abaixo como referência, temos



$$\left\{ \begin{array}{l} H_{3-1} = \frac{Z_1}{X} = \frac{1}{2} = 0,5 \\ W_{3-1} = \frac{Y_3}{X} = \frac{1}{2} = 0,5 \end{array} \right\} F_{3-1} = 0,241$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_{3-(1+2)} = \frac{Z_1+Z_2}{X} = \frac{2}{2} = 1 \\ W_{3-(1+2)} = \frac{Y_3}{X} = \frac{1}{2} = 0,5 \end{array} \right\} F_{3-(1+2)} = 0,292$$

O fator $F_{3-(1+2)}$ relaciona-se com os individuais, através do princípio da sobreposição:

$$F_{3-(1+2)} = F_{3-1} + F_{3-2}$$

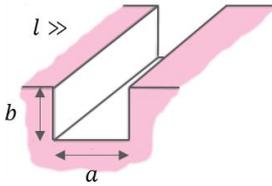
Podemos desta equação, e dos valores anteriores, calcular F_{3-2} .

$$F_{3-2} = F_{3-(1+2)} - F_{3-1} = 0,292 - 0,241 = 0,051$$

Agora, pela relação de reciprocidade, podemos calcular:

$$F_{2-3} = \frac{A_3}{A_2} F_{3-2} = \frac{1 \times 2}{1 \times 2} \times 0,051 = 0,051$$

P5.9

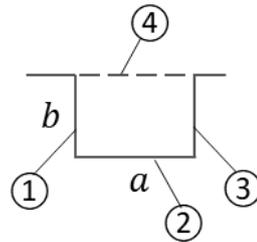


Calcule o fator de visão da ranhura da figura para o exterior. Calcule também o fator de visão das superfícies verticais da ranhura para o exterior. Considere a largura (l) muito grande.

Avalie o erro cometido nos cálculos anteriores se $l = 10a$, com $a = 1$ e $b = 1$.

Resolução e discussão

Considerando a largura (l) infinita, podemos identificar 4 superfícies planas que formam um volume fechado: 2 verticais e uma horizontal, formando a ranhura, e uma outra virtual, que fecha o volume e representa a passagem para o exterior, como representa a figura seguinte.



Então queremos começar por calcular o fator de visão das 3 superfícies que compõem a ranhura para o exterior, ou seja $F_{(1+2+3)-4}$. Pela relação de reciprocidade podemos escrever

$$F_{(1+2+3)-4} = A_4 F_{4-(1+2+3)} / A_{(1+2+3)}$$

Tendo em conta que toda a radiação que sai de 4 (face virtual inferior) vai ter a 1, 2 ou 3, ou seja que $F_{4-(1+2+3)} = 1$:

$$F_{(1+2+3)-4} = A_4 \times 1 / A_{(1+2+3)} = \frac{a}{a+2b}$$

Queremos também calcular o fator $F_{(1+3)-4}$. Usando a mesma relação de reciprocidade:

$$F_{(1+3)-4} = A_4 F_{4-(1+3)} / A_{(1+3)}$$

Quanto a $F_{4-(1+3)}$, podemos usar o princípio da sobreposição e depois o da simetria, vindo:

$$F_{(1+3)-4} = A_4 (F_{4-1} + F_{4-3}) / A_{(1+3)} = A_4 \times 2F_{4-1} / A_{(1+3)} = \frac{a \times 2}{2 \times b} F_{4-1} = \frac{a}{b} F_{4-1}$$

Podemos calcular F_{4-1} pela expressão da Figura 5.7, para planos perpendiculares com uma aresta comum, sendo então:

$$F_{4-1} = \frac{1+w_1/w_4 - (1+(w_1/w_4)^2)^{1/2}}{2} = \frac{1+b/a - (1+(b/a)^2)^{1/2}}{2}$$

e por sua vez:

$$F_{(1+3)-4} = \frac{a}{b} \frac{1+b/a - (1+(b/a)^2)^{1/2}}{2}$$

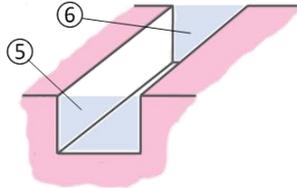
Considerando $a = b = 1$ temos os seguintes valores para os 2 fatores:

$$F_{(1+2+3)-4} = \frac{a}{a+2b} = \frac{1}{1+2 \times 1} = 0,333$$

$$F_{(1+3)-4} = \frac{a}{b} \frac{1+b/a - (1+(b/a)^2)^{1/2}}{2} = \frac{1}{1} \times \frac{1+1 - (1+(1)^2)^{1/2}}{2} = 0,293$$

Pode concluir-se que a maior parte da radiação que sai da ranhura fica na própria ranhura (2/3). Quanto à radiação que sai das superfícies verticais, 29,3% vão para o exterior, outros 29,3% vão para a superfície horizontal (2), e os restantes 41,4% ficam nas próprias superfícies verticais (1+3).

Vamos agora efetuar os cálculos para uma largura finita, igual a 10. Vamos considerar 2 novas superfícies virtuais nos topos, como mostra a figura:



Queremos então calcular agora: $F_{(1+2+3)-(4+5+6)}$ e $F_{(1+3)-(4+5+6)}$. Podemos expressar o primeiro usando os vários princípios vistos:

$$\begin{aligned} F_{(1+2+3)-(4+5+6)} &= F_{(1+2+3)-4} + F_{(1+2+3)-5} + F_{(1+2+3)-6} = \\ &= \frac{A_4}{A_{(1+2+3)}} (F_{4-1} + F_{4-2} + F_{4-3}) + 2 \times \frac{A_5}{A_{(1+2+3)}} (F_{5-1} + F_{5-2} + F_{5-3}) \\ &= \frac{A_4}{A_{(1+2+3)}} (2 \times F_{4-1} + F_{4-2}) + 2 \times \frac{A_5}{A_{(1+2+3)}} (2 \times F_{5-1} + F_{5-2}) \end{aligned}$$

Usando as expressões das Figuras 5.9 (planos paralelos alinhados) e 5.10 (planos perpendiculares com aresta comum) podemos calcular os fatores de visão F_{4-1} , F_{4-2} , F_{5-1} e F_{5-2} . Obtêm-se então os valores:

$$F_{4-1} = 0,282$$

$$F_{4-2} = 0,386$$

$$F_{5-1} = 0,249$$

$$F_{5-2} = F_{5-1} = 0,249$$

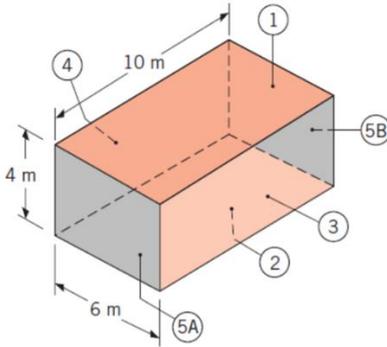
$$F_{(1+2+3)-(4+5+6)} = \frac{1 \times 10}{3 \times 10} (2 \times 0,282 + 0,386) + 2 \times \frac{1 \times 1}{3 \times 10} (2 \times 0,249 + 0,249) = 0,366$$

Quanto a $F_{(1+3)-(4+5+6)}$ temos:

$$\begin{aligned} F_{(1+3)-(4+5+6)} &= F_{(1+3)-4} + F_{(1+3)-5} + F_{(1+3)-6} = \\ &= \frac{A_4}{A_{(1+3)}} (F_{4-1} + F_{4-3}) + 2 \times \frac{A_5}{A_{(1+3)}} (F_{5-1} + F_{5-3}) = \\ &= \frac{A_4}{A_{(1+3)}} (2 \times F_{4-1}) + 2 \times \frac{A_5}{A_{(1+3)}} (2 \times F_{5-1}) = \\ &= \frac{1 \times 10}{2 \times 10} (2 \times 0,282) + 2 \times \frac{1 \times 1}{2 \times 10} (2 \times 0,249) = 0,332 \end{aligned}$$

Então, considerando a largura finita da ranhura e portanto as perdas pelos topos, o fator de visão da ranhura para o exterior é igual a 0,366, comparado com os 0,333 calculados anteriormente (largura infinita); há um aumento de 10%. Quanto ao fator de visão das superfícies verticais da ranhura (1 e 3) para o exterior, é igual a 0,332, enquanto sem considerar os topos se tinha 0,293 (mais 13%).

P5.10



Uma sala é um espaço fechado, com o teto (1, $\varepsilon = 0,8$, 30°C) e chão (2, $\varepsilon = 0,9$, 30°C) aquecidos por elementos elétricos. A parede da direita (3) tem $\varepsilon = 0,7$ e encontra-se a uma temperatura de equilíbrio de 15°C num dia de Inverno. A parede da esquerda (4) e as restantes (5A e 5B) estão muito bem isoladas pelo exterior; estas (5A e 5B) podem tratar-se como uma única (5).

Sendo todas as superfícies cinzentas e difusas, calcule o balanço radiativo e a temperatura de cada superfície, desprezando a convecção).

Resolução e discussão

Vamos considerar que as superfícies apenas trocam calor por radiação, como especificado. Podemos escrever as equações de radiosidade das 3 superfícies cuja temperatura é conhecida:

$$\begin{cases} \dot{q}_{\text{radios},1} = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon_1)(\dot{q}_{\text{radios},2} F_{1-2} + \dot{q}_{\text{radios},3} F_{1-3} + \dot{q}_{\text{radios},4} F_{1-4} + \dot{q}_{\text{radios},5} F_{1-5}) \\ \dot{q}_{\text{radios},2} = \varepsilon_2 \sigma T_2^4 + (1 - \varepsilon_2)(\dot{q}_{\text{radios},1} F_{2-1} + \dot{q}_{\text{radios},3} F_{2-3} + \dot{q}_{\text{radios},4} F_{2-4} + \dot{q}_{\text{radios},5} F_{2-5}) \\ \dot{q}_{\text{radios},3} = \varepsilon_3 \sigma T_3^4 + (1 - \varepsilon_3)(\dot{q}_{\text{radios},1} F_{3-1} + \dot{q}_{\text{radios},2} F_{3-2} + \dot{q}_{\text{radios},4} F_{3-4} + \dot{q}_{\text{radios},5} F_{3-5}) \end{cases}$$

Quanto às superfícies cuja temperatura não é conhecida (4 e 5), vamos utilizar as suas equações de balanço energético, relembrando que não trocam calor a não ser com as outras superfícies, e que a superfície 5 envia radiação para si própria:

$$\begin{cases} \dot{q}_{\text{radios},4} = \dot{q}_{\text{radios},1} F_{4-1} + \dot{q}_{\text{radios},2} F_{4-2} + \dot{q}_{\text{radios},3} F_{4-3} + \dot{q}_{\text{radios},5} F_{4-5} \\ \dot{q}_{\text{radios},5} = \dot{q}_{\text{radios},1} F_{5-1} + \dot{q}_{\text{radios},2} F_{5-2} + \dot{q}_{\text{radios},3} F_{5-3} + \dot{q}_{\text{radios},4} F_{5-4} + \dot{q}_{\text{radios},5} F_{5-5} \end{cases}$$

Calculados os fatores de visão, poderemos resolver o sistema linear de 5 equações e calcular as 5 radiosidades. Usando as expressões das Figuras 5.9 (planos paralelos alinhados) e 5.10 (planos perpendiculares com aresta comum), a par dos princípios da reciprocidade, simetria e sobreposição, podemos calcular:

$$\text{entre 1 e 2: } X/L = 10/4 = 2,5 ; Y/L = 6/4 = 1,5 ; F_{1-2} = F_{2-1} = 0,39$$

$$\text{entre 1 e 3/4: } Z/X = 4/10 = 0,4 ; Y/X = 6/10 = 0,6 ; F_{1-3} = F_{1-4} = 0,19$$

$$\text{entre 3 e 4: } X/L = 10/6 = 1,66 ; Y/L = 4/6 = 0,67 ; F_{3-4} = F_{4-3} = 0,19$$

$$\text{por simetria: } F_{2-4} = F_{1-3} = 0,19$$

$$\text{por reciprocidade e simetria: } F_{3-2} = \frac{A_2}{A_3} F_{2-3} = \frac{A_2}{A_3} F_{1-3} = \frac{60}{40} 0,19 = 0,285 = F_{3-1}$$

$$F_{1-5} = 1 - F_{1-2} - F_{1-3} - F_{1-4} = 0,23$$

$$F_{5-1} = \frac{A_1}{A_5} F_{1-5} = \frac{60}{48} 0,23 = 0,288 = F_{5-2}$$

$$F_{2-5} = 1 - F_{2-1} - F_{2-3} - F_{2-4} = 1 - 0,39 - 0,19 - 0,19 = 0,23$$

$$F_{3-5} = 1 - F_{3-1} - F_{3-2} - F_{3-4} = 1 - 0,285 - 0,285 - 0,19 = 0,24$$

$$F_{5-3} = \frac{A_3}{A_5} F_{3-5} = \frac{40}{48} 0,24 = 0,20 = F_{5-4}$$

$$F_{5-5} = 1 - F_{5-1} - F_{5-2} - F_{5-3} - F_{5-4} = 1 - 0,288 - 0,288 - 0,2 - 0,2 = 0,024$$

Temos então o sistema:

$$\begin{cases} \dot{q}_{\text{radios},1} = 0,8 \sigma 303,15^4 + 0,2(0,39 \dot{q}_{\text{radios},2} + 0,19 \dot{q}_{\text{radios},3} + 0,19 \dot{q}_{\text{radios},4} + 0,23 \dot{q}_{\text{radios},5}) \\ \dot{q}_{\text{radios},2} = 0,9 \sigma 303,15^4 + 0,1(0,39 \dot{q}_{\text{radios},1} + 0,19 \dot{q}_{\text{radios},3} + 0,19 \dot{q}_{\text{radios},4} + 0,23 \dot{q}_{\text{radios},5}) \\ \dot{q}_{\text{radios},3} = 0,7 \sigma 288,15^4 + 0,3(0,285 \dot{q}_{\text{radios},1} + 0,285 \dot{q}_{\text{radios},2} + 0,19 \dot{q}_{\text{radios},4} + 0,24 \dot{q}_{\text{radios},5}) \\ \dot{q}_{\text{radios},4} = 0,285 \dot{q}_{\text{radios},1} + 0,285 \dot{q}_{\text{radios},2} + 0,19 \dot{q}_{\text{radios},3} + 0,24 \dot{q}_{\text{radios},5} \\ \dot{q}_{\text{radios},5} = 0,288 \dot{q}_{\text{radios},1} + 0,288 \dot{q}_{\text{radios},2} + 0,2 \dot{q}_{\text{radios},3} + 0,2 \dot{q}_{\text{radios},4} + 0,024 \dot{q}_{\text{radios},5} \end{cases}$$

cuja solução é:

$$\begin{cases} \dot{q}_{\text{radios},1} = 474,7 \text{ W/m}^2 \\ \dot{q}_{\text{radios},2} = 476,7 \text{ W/m}^2 \\ \dot{q}_{\text{radios},3} = 414,3 \text{ W/m}^2 \\ \dot{q}_{\text{radios},4} = 460,2 \text{ W/m}^2 \\ \dot{q}_{\text{radios},5} = 459,9 \text{ W/m}^2 \end{cases}$$

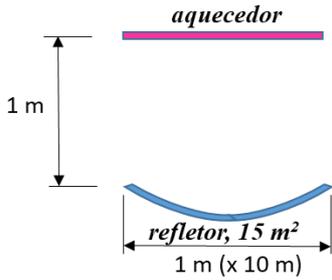
Note-se que as maiores radiosidades correspondem às superfícies mais quentes (teto e chão, que são aquecidos eletricamente), embora não seja a temperatura o único fator decisivo (a emissividade tem um papel importante na radiosidade).

Podemos recorrer às equações de balanço térmico de 1, 2 e 3, para calcular as potências que elas devem trocar para estarem em equilíbrio, e às equações de radiosidades de 4 e 5, para calcular as suas temperaturas. Temos:

$$\begin{cases} \dot{Q}_{\text{rad},1} = -1008 \text{ W} \\ \dot{Q}_{\text{rad},2} = -1177 \text{ W} \\ \dot{Q}_{\text{rad},3} = +2186 \text{ W} \\ T_4 = 300,15 \text{ K} = 27^\circ\text{C} \\ T_5 = 300,10 \text{ K} \cong 27^\circ\text{C} \end{cases}$$

Note-se na pequeníssima diferença entre as potências caloríficas perdidas (1 e 2) e ganhas (3) no interior do volume fechado, que é de apenas 1 W, e se deve a erros de arredondamento. As superfícies 4 e 5 têm um balanço nulo, as superfícies 1 e 2 (teto e chão) perdem calor para as restantes, devendo receber igual potência do sistema de aquecimento elétrico para se encontrarem em equilíbrio, e a superfície 3 recebe a potência perdida pelas superfícies aquecidas (1 e 2), que liberta para o exterior.

P5.11



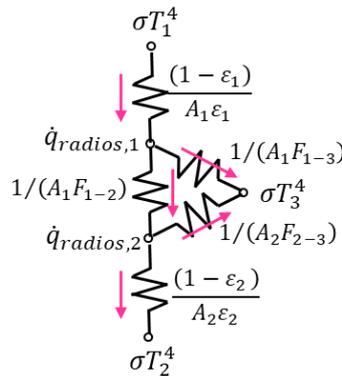
O tratamento térmico da superfície de um espelho refletor parabólico passa por mantê-lo a uma temperatura de 600 K, usando-se para tal um aquecedor de infravermelhos, cuja superfície é mantida a 1000 K. A emissividade do aquecedor é de 0,9 e a do refletor de 0,5 (ambos cinzentos e difusos). O conjunto está colocado numa sala com superfícies envolventes a 300 K, que se comportam como corpos negros.

Calcule a potência de aquecimento, considerando as superfícies muito longas para cálculo dos fatores de visão (infinitas no plano perpendicular ao do desenho), e desprezando a convecção.

Resolução e discussão

Temos uma situação de trocas radiativas entre 3 superfícies cinzentas e difusas que formam um volume fechado: a superfície do aquecedor (superfície 1), a superfície do refletor (2), e as superfícies envolventes do conjunto (3).

Podemos representar as trocas através do seguinte esquema de resistências de radiação:

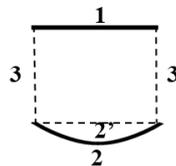


Não podemos calcular uma resistência global equivalente, uma vez que a superfície 3 (mais fria) não se encontra isolada: ela tem um balanço radiativo positivo (recebe energia) que irá ter de libertar para o seu exterior de modo a assegurar o regime permanente. No entanto, podemos usar o esquema acima, efetuando o balanço dos nodos radiosidade, o que resulta em:

$$\frac{\sigma T_1^4 - \dot{q}_{radios,1}}{(1-\varepsilon_1)/\varepsilon_1} = \frac{\dot{q}_{radios,1} - \dot{q}_{radios,2}}{1/F_{1-2}} + \frac{\dot{q}_{radios,1} - \sigma T_3^4}{1/F_{1-3}}$$

$$\frac{\dot{q}_{radios,2} - \sigma T_2^4}{(1-\varepsilon_2)/(A_2\varepsilon_2)} + \frac{\dot{q}_{radios,2} - \sigma T_3^4}{1/(A_2F_{2-3})} = \frac{\dot{q}_{radios,1} - \dot{q}_{radios,2}}{1/(A_1F_{1-2})}$$

Conhecem-se as temperaturas $T_1 = 1000$ K e $T_2 = 600$ K, e as emissividades, pelo que através do cálculo dos fatores de visão se podem obter as radiosidades de 1 e 2. Para calcular o fator F_{1-2} vamos servir-nos do facto de a superfície 2 poder ser considerada infinita em profundidade, pelo que, como representa a figura seguinte, se pode considerar como o fator entre 2 planos paralelos (1 e 2').



Então, usando a informação da Figura 5.9, obtém-se

$$F_{1-2} = F_{1-2'} = 0,39$$

vindo ainda

$$F_{1-3} = 1 - F_{1-2} = 0,61$$

$$A_2 F_{2-3} = A_2' F_{2'-3} = A_2' F_{1-3} \Rightarrow F_{2-3} = \frac{A_2'}{A_2} F_{1-3} = \frac{10}{15} \times 0,61 = 0,41$$

Substituindo estes fatores nas equações anteriores obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{56700 - \dot{q}_{\text{radios},1}}{(1-0,9)/0,9} = \frac{\dot{q}_{\text{radios},1} - \dot{q}_{\text{radios},2}}{1/0,39} + \frac{\dot{q}_{\text{radios},1} - 459}{1/0,61} \\ \frac{\dot{q}_{\text{radios},2} - 7348}{(1-0,5)/(15 \times 0,5)} + \frac{\dot{q}_{\text{radios},2} - 459}{1/(15 \times 0,41)} = \frac{\dot{q}_{\text{radios},1} - \dot{q}_{\text{radios},2}}{1/(10 \times 0,39)} \end{cases}$$

cujas resolução conduz a

$$\begin{cases} \dot{q}_{\text{radios},1} = 51547 \text{ W/m}^2 \\ \dot{q}_{\text{radios},2} = 12538 \text{ W/m}^2 \end{cases}$$

A partir das radiosidades podemos então calcular os balanços de 1 e 2, vindo:

$$\dot{Q}_{\text{rad},1} = -\frac{\sigma T_1^4 - \dot{q}_{\text{radios},1}}{(1-\varepsilon_1)/(A_1 \varepsilon_1)} = -463,8 \text{ kW}$$

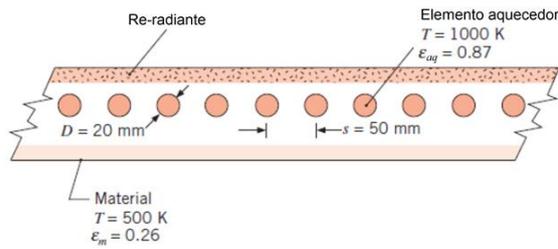
$$\dot{Q}_{\text{rad},2} = \frac{\dot{q}_{\text{radios},2} - \sigma T_2^4}{(1-\varepsilon_2)/(A_2 \varepsilon_2)} = 77,85 \text{ kW}$$

A potência de aquecimento (a fornecer ao aquecedor) é então de 463,8 kW, enquanto o refletor recebe 77,85 kW. As superfícies exteriores recebem um total de 385,95 kW, de modo a verificar a conservação de energia.

Se o refletor não fosse infinito, para as mesmas temperaturas das superfícies, a potência ganha por 2 ($\dot{Q}_{\text{rad},2}$) seria menor, porque o fator F_{1-2} seria menor (parte da radiação de 1 perdia-se para 3, em vez de chegar a 2 – nos topos).

Se o refletor fosse plano, em vez de parabólico, e com a mesma área do aquecedor, refazendo os cálculos obter-se-ia uma potência ($\dot{Q}_{\text{rad},2}$) de 65 kW, ou seja, ganharia menos calor por ter menor área. E $|\dot{Q}_{\text{rad},1}|$ seria um pouco menor: 456 kW (a área a aquecer seria menor).

P5.12



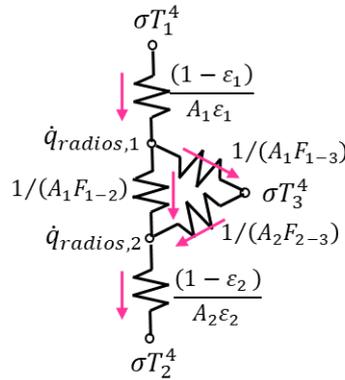
Um aquecedor radiativo consiste num conjunto de tubos cerâmicos com elementos aquecedores internos. Os tubos têm um diâmetro de 20 mm e estão espaçados de 50 mm. É colocada uma superfície isolada por trás dos tubos. Determine o fluxo radiativo ganho pelo material aquecido quando os tubos são mantidos a 1000 K.

O material está a 500 K, e todas as superfícies são cinzentas e difusas.

Resolução e discussão

Temos uma situação de trocas radiativas entre 3 superfícies cinzentas e difusas que formam um volume fechado: a superfície dos elementos aquecedores (no seu conjunto a superfície 1), a superfície do material aquecido (2), e a superfície isolada no lado oposto ao material (3).

Podemos representar as trocas através do seguinte esquema de resistências de radiação:



Como a superfície 3 está perfeitamente isolada, é uma superfície re-radiante, recebendo e perdendo a mesma quantidade de energia do lado do volume fechado, e com uma radiosidade igual à de um corpo negro. Assim, o balanço radiativo de 1 é igual ao de 2, em valor absoluto, e podemos calcular uma resistência global equivalente, vindo:

$$\dot{Q}_{rad,2} = \frac{\sigma T_1^4 - \sigma T_2^4}{\frac{1-\epsilon_1}{A_1 \epsilon_1} + \frac{1}{A_1 F_{1-2} + [(1/(A_1 F_{1-3})) + (1/(A_2 F_{2-3}))]^{-1}} + \frac{1-\epsilon_2}{A_2 \epsilon_2}}$$

O fator de visão do material para os aquecedores pode calcular-se através de uma expressão constante da Figura 5.8:

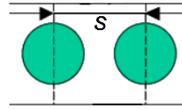
$$F_{2-1} = 1 - \left[1 - \left(\frac{D}{s} \right)^2 \right]^{0,5} + \frac{D}{s} \tan^{-1} \left[\left(\frac{s^2 - D^2}{D^2} \right)^{0,5} \right] =$$

$$= 1 - \left[1 - \left(\frac{20}{50} \right)^2 \right]^{0,5} + \frac{20}{50} \tan^{-1} \left[\left(\frac{0,05^2 - 0,02^2}{0,02^2} \right)^{0,5} \right] = 0,5472$$

sendo possível obter F_{1-2} pela relação de reciprocidade. Também permite calcular o fator F_{2-3} , por diferença para 1, sendo igual a 0,4528.

Quanto ao outro fator necessário, F_{1-3} , é igual a $1 - F_{1-2}$, e F_{3-1} é o seu recíproco.

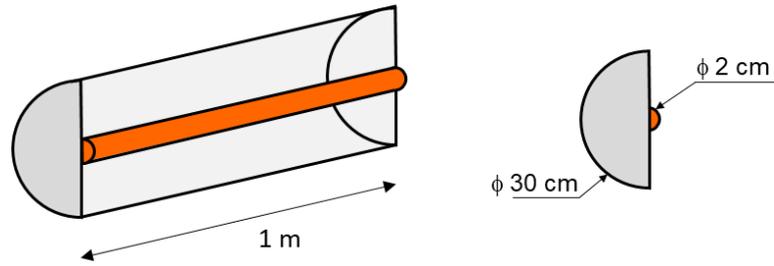
Expressando o balanço radiativo de 2 por unidade de área, e considerando uma secção unitária entre 2 tubos aquecedores (representada na figura seguinte), tem-se:



$$\begin{aligned} \dot{q}_{rad,2} &= \frac{\sigma T_1^4 - \sigma T_2^4}{\frac{(1-\varepsilon_1)A_2}{\varepsilon_1 A_1} + \frac{A_2}{A_2 F_{2-1} + [(1/(A_3 F_{3-1})) + (1/(A_2 F_{2-3}))]^{-1}} + \frac{(1-\varepsilon_2)A_2}{\varepsilon_2 A_2}} = \\ &= \frac{\sigma T_1^4 - \sigma T_2^4}{\frac{(1-\varepsilon_1)s}{\varepsilon_1 \pi D} + \frac{s}{s F_{2-1} + [(1/(s F_{3-1})) + (1/(s F_{2-3}))]^{-1}} + \frac{(1-\varepsilon_2)}{\varepsilon_2}} = 12590 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

Note-se que numa situação real, de isolamento não ideal da superfície 3, o material (2) receberia menos calor dos aquecedores. Na situação ideal, a radiação dos aquecedores que não vai diretamente para o material acaba por lá chegar por re-radiação de 3.

P5.13



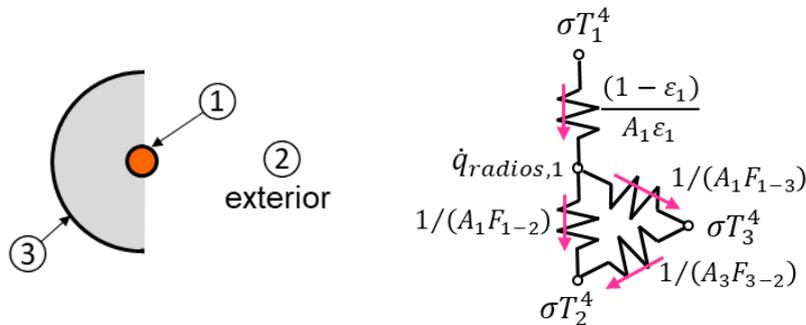
O aquecedor radiador da figura contém um elemento cilíndrico com uma resistência elétrica no seu interior, que mantém a superfície à temperatura de 600°C . O elemento aquecedor (com $\alpha = \varepsilon = 0,8$) é rodeado por uma superfície semi-cilíndrica com boas características refletoras ($\rho = 0,9$, cinzenta e difusa), com 2 topos semi-circulares com as mesmas características. Este conjunto refletor está muito bem isolado nas faces exteriores.

Estando o aquecedor colocado numa sala cujas superfícies se mantêm à temperatura de 20°C , calcule a potência radiativa que o aquecedor fornece às superfícies da sala, e a temperatura das superfícies refletoras, desprezando a convecção.

Resolução e discussão

Temos uma situação de trocas radiativas entre 3 superfícies cinzentas e difusas que formam um volume fechado: a superfície do elemento cilíndrico aquecedor (superfície 1), as superfícies aquecidas da sala (2), e as superfícies refletoras isoladas (3).

Podemos representar as trocas através do seguinte esquema de resistências de radiação:



esquema que traduz o isolamento perfeito das superfícies refletoras ((3)), que sendo re-radiantes têm uma radiosidade igual à de um corpo negro, e que as superfícies da sala ((2)), de área muito superior às restantes, se comportam como um corpo negro. Podemos calcular uma resistência equivalente do conjunto, de modo a calcular $\dot{Q}_{rad,1} = \dot{Q}_{rad,2}$ (em módulo).

Os fatores de visão que intervêm no esquema acima são: F_{1-2} , F_{1-3} e F_{3-2} . Os 2 primeiros são muito simples de calcular: atendendo à simetria, $F_{1-2} = F_{1-3} = 0,5$. Já F_{3-2} é mais difícil de calcular, pois existem os fatores F_{3-1} , F_{3-2} e F_{3-3} .

O fator F_{3-1} obtém-se da relação de reciprocidade:

$$F_{3-1} = \frac{A_1}{A_3} F_{1-3} = \frac{\pi D_1 L}{\pi D_3 L / 2 + \pi D_3^2 / 4} F_{1-3} = \frac{0,02 \times 1}{0,3 \times 1 / 2 + 0,3^2 / 4} \times 0,5 = \frac{0,02}{0,1725} \times 0,5 = 0,058$$

desprezando os topos do aquecedor ((1)), e considerando para ((3)) as áreas dos 2 topos semi-circulares.

Quanto a F_{3-3} , vamos recorrer à referência [5], que indica para o fator de uma superfície semi-cilíndrica infinita para si própria (③), com a existência de uma superfície cilíndrica infinita com o mesmo centro/eixo (①):

$$F_{3-3} = 1 - \frac{2}{\pi} \left((1 - R_D^2)^{0,5} + R_D \frac{\pi}{180} \arcsen R_D \right) \quad [\text{com o } \arcsen R_D \text{ em graus}]$$

sendo R_D a razão dos diâmetros. Vem então:

$$F_{3-3} = 1 - \frac{2}{\pi} \left(\left(1 - \left(\frac{2}{30} \right)^2 \right)^{0,5} + \frac{2}{30} \frac{\pi}{180} \arcsen \frac{2}{30} \right) = 0,362$$

Note-se que as superfícies ① e ③ não são infinitas; no entanto os 2 topos semi-circulares equivalem à restante dimensão (para além de $L=1$ m). Note-se também que se calculássemos o fator F_{3-3} desprezando a existência de ① teríamos um valor pouco superior igual a 0,363, o que se deve à pequena dimensão de ① relativamente a ③.

Podemos finalmente calcular o fator F_{3-2} :

$$F_{3-2} = 1 - F_{3-1} - F_{3-3} = 1 - 0,058 - 0,362 = 0,580$$

e a potência radiativa (balanço):

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{rad,2} &= \frac{\sigma T_1^4 - \sigma T_2^4}{\frac{1-\varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1} + \frac{1}{A_1 F_{1-2} + [(1/(A_1 F_{1-3})) + (1/(A_3 F_{3-2}))]^{-1}}} = \\ &= \frac{5,67 \times 10^{-8} \times (873,15^4 - 293,15^4)}{\frac{1-0,8}{\pi \times 0,02 \times 1 \times 0,8} + \frac{1}{\pi \times 0,02 \times 1 \times 0,5 + [(1/(\pi \times 0,02 \times 1 \times 0,5)) + (1/(\pi \times 0,1725 \times 0,58))]^{-1}}} = 1576 \text{ W} \end{aligned}$$

Saliente-se que o coeficiente de reflexão das superfícies ③ não teve qualquer impacto na potência calculada. No entanto, tal só acontece pelo seu perfeito isolamento nas faces posteriores, o que é uma situação ideal. No problema P6.16 será considerada uma situação não ideal para este aquecedor, com perdas de calor das superfícies refletoras.

Quanto à temperatura das superfícies refletoras (③), pode obter-se recorrendo ao esquema de resistências visto, e ao balanço dos nodos radiosidade $\dot{q}_{radios,1}$ e $\dot{q}_{radios,3}$. Podemos escrever:

$$\begin{cases} \frac{\sigma T_1^4 - \dot{q}_{radios,1}}{(1-\varepsilon_1)/(A_1 \varepsilon_1)} = \frac{\dot{q}_{radios,1} - \sigma T_2^4}{1/(A_1 F_{1-2})} + \frac{\dot{q}_{radios,1} - \sigma T_3^4}{1/(A_1 F_{1-3})} \\ \frac{\dot{q}_{radios,1} - \sigma T_3^4}{1/(A_1 F_{1-3})} = \frac{\sigma T_3^4 - \sigma T_2^4}{1/(A_3 F_{3-2})} \end{cases}$$

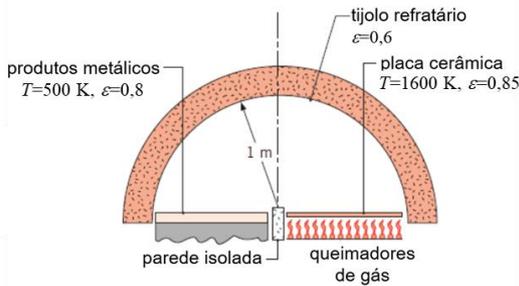
$$\begin{cases} \frac{\sigma \times 873,15^4 - \dot{q}_{radios,1}}{(1-0,8)/(\pi \times 0,02 \times 1 \times 0,8)} = \frac{\dot{q}_{radios,1} - \sigma \times 293,15^4}{1/(\pi \times 0,02 \times 1 \times 0,5)} + \frac{\dot{q}_{radios,1} - \sigma T_3^4}{1/(\pi \times 0,02 \times 1 \times 0,5)} \\ \frac{\dot{q}_{radios,1} - \sigma T_3^4}{1/(\pi \times 0,02 \times 1 \times 0,5)} = \frac{\sigma T_3^4 - \sigma \times 293,15^4}{1/(\pi \times 0,1725 \times 0,58)} \end{cases}$$

que conduz aos resultados:

$$\begin{cases} \dot{q}_{radios,1} = 26689 \text{ W/m}^2 \\ T_3 = 471,7 \text{ K} = 198,5^\circ\text{C} \end{cases}$$

A temperatura T_3 também não é influenciada pelo coeficiente de reflexão de ③, o que deixa de acontecer numa situação mais realista de isolamento imperfeito. A temperatura será tanto mais elevada quanto menor for o seu coeficiente de reflexão.

P5.14



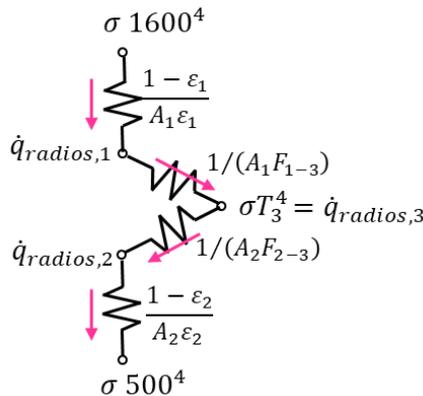
O interior de um forno com a forma semi-cilíndrica, com uma dimensão perpendicular ao plano da figura muito grande, pode considerar-se dividido em 3 superfícies: a zona de aquecimento, com uma placa cerâmica mantida a 1600 K com queimadores de gás, a zona de carga, onde produtos metálicos são mantidos a 500 K, e a parede construída em tijolo refratário (isolante).

Sendo todas as superfícies cinzentas e difusas, calcule a potência radiativa que os queimadores de gás têm de fornecer para as condições especificadas. Calcule a temperatura das paredes na hipótese de a convecção interior ser desprezável.

Resolução e discussão

Temos uma situação de trocas radiativas entre 3 superfícies cinzentas e difusas que formam um volume fechado: a superfície aquecedora (superfície 1), a superfície dos produtos metálicos aquecidos (2), e a superfície das paredes isoladas (3).

Podemos representar as trocas através do seguinte esquema de resistências de radiação:



Note-se que não há radiação trocada diretamente entre o aquecedor (1) e as peças (2), havendo trocas entre 1 e 3, e entre 2 e 3. A superfície das paredes (3) pode considerar-se re-radiante, por estar isolada, tendo uma resistência superficial nula. Por outro lado, os fatores de visão F_{1-3} e F_{2-3} são iguais a 1. Associando as 4 resistências em série do esquema, podemos calcular a potência com:

$$|\dot{Q}_{rad,1}| = \dot{Q}_{rad,2} = \frac{\sigma T_1^4 - \sigma T_2^4}{\frac{1-\epsilon_1}{A_1 \epsilon_1} + \frac{1}{A_1 F_{1-3}} + \frac{1}{A_2 F_{2-3}} + \frac{1-\epsilon_2}{A_2 \epsilon_2}} = \frac{5,67 \times 10^{-8} \times (1600^4 - 500^4)}{\frac{1-0,85}{1 \times 0,85} + \frac{1}{1 \times 1} + \frac{1}{1 \times 1} + \frac{1-0,8}{1 \times 0,8}} = 151,7 \text{ kW/m}$$

Para calcular a temperatura das paredes (T_3) podemos associar as resistências 2 a 2:

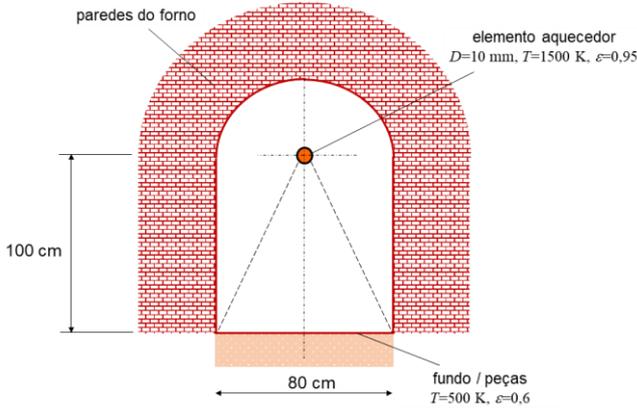
$$\frac{\sigma(1600^4 - T_3^4)}{\frac{1-0,85}{1 \times 0,85} + \frac{1}{1 \times 1}} = \frac{\sigma(T_3^4 - 500^4)}{\frac{1}{1 \times 1} + \frac{1-0,8}{1 \times 0,8}}$$

o que nos permite calcular:

$$T_3 = 1359 \text{ K}$$

Note-se que apesar de as 2 resistências associadas terem valores semelhantes (1,176 e 1,25), a temperatura T_3 está bastante mais próxima da de T_1 que da de T_2 . É o efeito do expoente 4.

P5.15



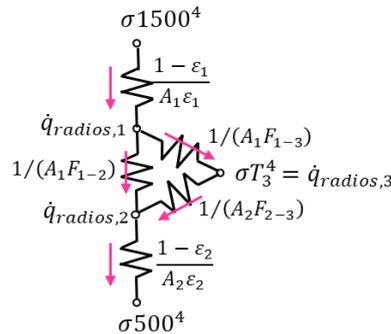
Um forno utiliza um elemento aquecedor cilíndrico, de 10 mm de diâmetro, que é mantido a 1500 K e tem $\alpha=\varepsilon=0,95$. A superfície das peças, colocadas no fundo, é mantida a 500 K e tem $\alpha=\varepsilon=0,6$. As paredes do forno, em material refratário, podem considerar-se isoladas. A profundidade do forno, na perpendicular ao plano do desenho, pode ser considerada infinita face às outras dimensões.

Considerando todas as paredes à mesma temperatura, e desprezando a convecção, calcule a potência a fornecer ao elemento aquecedor para manter as condições especificadas. Calcule também a temperatura das paredes.

Resolução e discussão

Temos uma situação de trocas radiativas entre 3 superfícies cinzentas e difusas que formam um volume fechado: a superfície aquecedora (superfície 1), a superfície das peças aquecidas (2), e a superfície re-radiante das paredes isoladas (3).

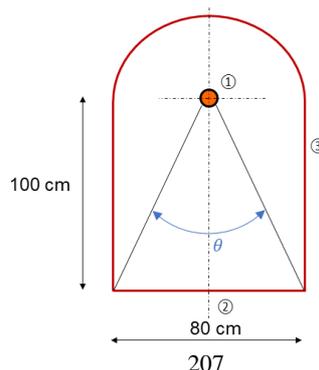
Podemos representar as trocas através do seguinte esquema de resistências de radiação:



Podemos calcular o balanço de 1 e 2 (igual a menos do sinal) usando a resistência equivalente do conjunto acima representado:

$$|\dot{Q}_{rad,1}| = \dot{Q}_{rad,2} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1-\varepsilon_1}{A_1\varepsilon_1} + \frac{1}{A_1F_{1-2} + [(1/(A_1F_{1-3})) + (1/(A_2F_{2-3}))]^{-1}] + \frac{1-\varepsilon_2}{A_2\varepsilon_2}}$$

Precisamos de calcular os fatores de visão F_{1-2} , F_{1-3} e F_{2-3} . Para calcular F_{1-2} podemos assumir que o fator é igual ao ângulo θ da figura abaixo dividido por 360° (fração do total que sai de 1).



Como,

$$\theta = 2 \arctan \frac{40}{100} = 43,6^\circ$$

então

$$F_{1-2} = \frac{43,6}{360} = 0,121$$

$$F_{1-3} = 1 - F_{1-2} = 0,879$$

$$F_{2-1} = \frac{A_1}{A_2} F_{1-2} = \frac{\pi \times 0,010}{0,80} \times 0,121 = 0,005$$

$$F_{2-3} = 1 - F_{2-1} = 0,995$$

Substituindo os valores na equação da potência:

$$|\dot{Q}_{rad,1}| = \frac{5,67 \times 10^{-8} \times (1500^4 - 500^4)}{\frac{1-0,95}{\pi \times 0,01 \times 0,95} + \frac{1}{\pi \times 0,01 \times 0,121 + [(1/(\pi \times 0,01 \times 0,879)) + (1/(0,8 \times 0,995))]^{-1} + \frac{1-0,6}{0,8 \times 0,6}}} = 8030 \text{ W/m}$$

Para calcular a temperatura das paredes (T_3) vamos começar por calcular as radiosidades de 1 e 2. Atendendo ao esquema de resistências anterior:

$$\frac{\sigma 1500^4 - \dot{q}_{radios,1}}{(1-0,95)/(\pi \times 0,01 \times 0,95)} = 8030$$

$$\frac{\dot{q}_{radios,2} - \sigma 500^4}{(1-0,6)/(0,8 \times 0,6)} = 8030$$

vindo

$$\dot{q}_{radios,1} = 273591 \text{ W/m}^2$$

$$\dot{q}_{radios,2} = 10235 \text{ W/m}^2$$

Recorrendo novamente ao esquema de resistências anterior, podemos efetuar o balanço do nodo radiosidade de 3:

$$A_1 F_{1-3} (\dot{q}_{radios,1} - \sigma T_3^4) = A_2 F_{2-3} (\sigma T_3^4 - \dot{q}_{radios,2})$$

ou seja, teremos:

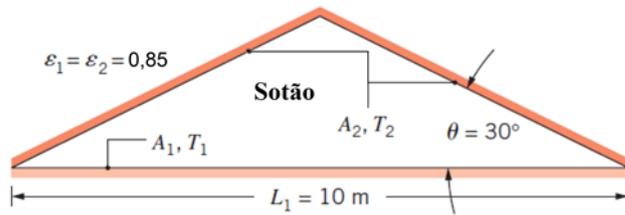
$$\pi \times 0,01 \times 0,879 \times (273591 - \sigma T_3^4) = 0,8 \times 0,995 \times (\sigma T_3^4 - 10235)$$

$$T_3 = 761,5 \text{ K}$$

Neste problema a temperatura das paredes do forno (T_3) está muito mais próxima da temperatura da superfície aquecida (T_2) do que da do aquecedor (T_1), ao contrário do que acontecia no forno do problema P5.14. Isso deve-se à grande resistência espacial entre 1 e 3, em consequência da reduzida área do aquecedor, que faz aumentar a diferença entre as temperaturas dessas superfícies (aquecedor e paredes). No problema P5.14 as resistências espaciais entre 1 e 3 e entre 2 e 3 eram exatamente iguais, enquanto agora a primeira é quase 30 vezes maior que a segunda.

Note-se também a diferença na potência necessária do forno, que é cerca de 20 vezes menor.

P5.16



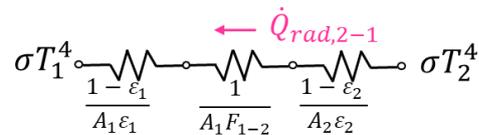
Considere o sótão de um edifício representado na figura, durante o Verão. A dimensão perpendicular ao desenho é muito grande. O proprietário pretende reduzir o calor ganho pelo telhado instalando folha de alumínio ($\epsilon = 0,07$) a revestir as superfícies interiores.

Para as mesmas temperaturas T_1 e T_2 , calcule a redução na potência transferida por radiação para: folha colocada na face 1, folha colocada nas faces 2, folha colocada em ambas.

Resolução e discussão

O sótão de um edifício é uma zona de potencial ganho excessivo de calor no Verão, devido à incidência de radiação solar no exterior ser elevada. Uma das formas de evitar que esse calor chegue ao interior consiste em reduzir a condução do calor no telhado (2) ou cobertura (1), colocando um material isolante térmico. A outra, que pode ser usada em combinação com a anterior, consiste em reduzir as trocas de radiação entre o telhado mais quente (2) e a cobertura (1), colocando um material de baixa emissividade (folha de alumínio neste caso).

Podemos usar o seguinte esquema de resistências de radiação para representar as trocas entre 1 e 2:



A potência será então:

$$\dot{Q}_{2-1} = \frac{\sigma(T_2^4 - T_1^4)}{\frac{1-\epsilon_1}{A_1\epsilon_1} + \frac{1}{A_1F_{1-2}} + \frac{1-\epsilon_2}{A_2\epsilon_2}}$$

cujo valor dependerá da resistência global:

$$R_{rad} = \frac{1-\epsilon_1}{A_1\epsilon_1} + \frac{1}{A_1F_{1-2}} + \frac{1-\epsilon_2}{A_2\epsilon_2}$$

Vamos então comparar as resistências nos 3 casos possíveis para a colocação da folha de alumínio, com a sua não utilização:

$$R_{rad,sem\ folha} = \frac{1-0,85}{10 \times 0,85} + \frac{1}{10 \times 1} + \frac{1-0,85}{10/\cos 30^\circ \times 0,85} = 0,133 \text{ m}^{-2}$$

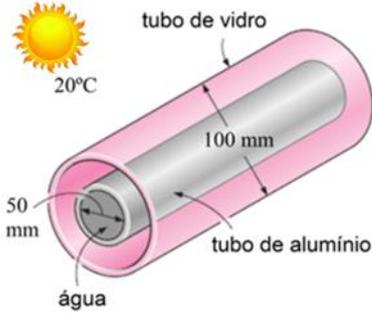
$$R_{rad,face\ 1} = \frac{1-0,07}{10 \times 0,07} + \frac{1}{10 \times 1} + \frac{1-0,85}{10/\cos 30^\circ \times 0,85} = 1,44 \text{ m}^{-2}$$

$$R_{rad,face\ 2} = \frac{1-0,85}{10 \times 0,85} + \frac{1}{10 \times 1} + \frac{1-0,07}{10/\cos 30^\circ \times 0,07} = 1,27 \text{ m}^{-2}$$

$$R_{rad,faces\ 1\ e\ 2} = \frac{1-0,07}{10 \times 0,07} + \frac{1}{10 \times 1} + \frac{1-0,07}{10/\cos 30^\circ \times 0,07} = 2,58 \text{ m}^{-2}$$

Como se esperava, a melhor solução consiste em revestir as 2 faces com folha de alumínio, o que reduz a potência trocada para 5% (para as mesmas temperaturas). No entanto, o revestimento de apenas uma face já reduz as trocas para 9% (face 1) e 10% (face 2). A colocação apenas na face 1 é eventualmente mais interessante, pois permite gastar menos material com bons resultados (melhor do que com colocação apenas na face 2).

P5.17



Um coletor solar é constituído por vários tubos de vidro (com 100 mm de diâmetro), no interior dos quais existe um outro tubo em alumínio (com 50 mm de diâmetro) que absorve a radiação solar incidente. O espaço entre os tubos foi evacuado, havendo perdas de calor entre o tubo de alumínio e o de vidro, perdas que depois são transferidas para o exterior.

O tubo de vidro tem um coeficiente de transmissão (hemisférico) que varia com o comprimento de onda da radiação incidente (λ), sendo igual a 0,85 para λ entre 0 e 3 μm e 0 para λ acima de 3 μm , e um coeficiente de absorção para $\lambda < 3 \mu\text{m}$ de 0,05, comportando-se como uma superfície cinzenta e difusa para $\lambda > 3 \mu\text{m}$, com $\varepsilon = 0,8$.

O tubo de alumínio pode ter diferentes revestimentos, desde o dióxido de titânio que lhe confere uma emissividade para $\lambda > 3 \mu\text{m}$ de 0,05 (igual ao coeficiente de absorção), até uma tinta preta corrente que lhe confere uma emissividade para $\lambda > 3 \mu\text{m}$ de 0,95 (igual ao coeficiente de absorção).

Considerando valores de emissividade do tubo interior entre 0,05 e 0,95, calcule a potência perdida por metro de comprimento, quando a temperatura do tubo de alumínio é de 52°C e a temperatura do tubo de vidro é de 20,5°C. Admita que estas temperaturas se mantêm para diferentes emissividades.

Resolução e discussão

O vidro do tubo exterior é transparente à radiação solar situada na sua quase totalidade nos comprimentos de onda até 3 μm . Se calcularmos a fração de energia que um corpo negro a 5800 K (equivalente ao Sol) emite entre 0 e 3 μm , a partir da Tabela 5.1 encontramos um valor igual a

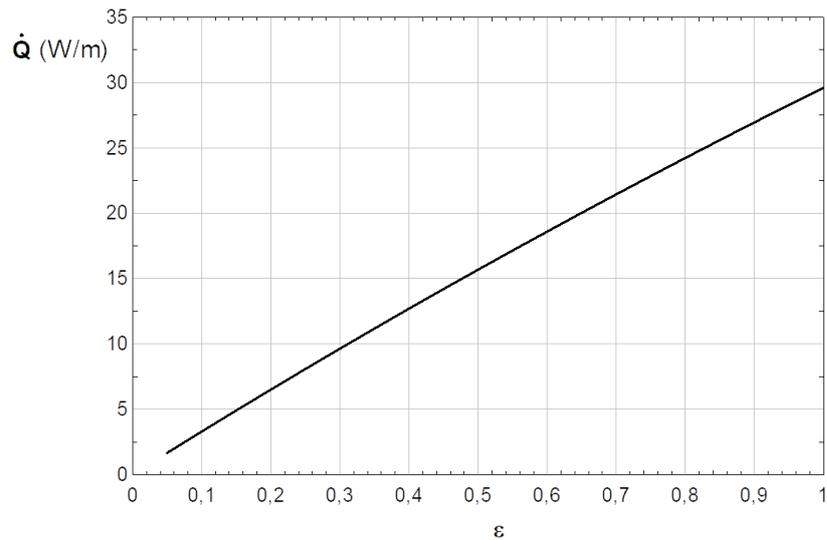
$$F_{0-3}(3 \times 5800 \mu\text{mK}) = 0,98$$

Ao invés, a radiação emitida pelo tubo de alumínio (a 52°C) está toda situada nos comprimentos de onda acima de 3 μm ; usando a mesma tabela para um corpo negro encontraríamos um valor quase igual a 0, que se mantém verdadeiro para o tubo interior. O vidro também emite radiação só acima dos 3 μm , uma vez que se encontra a uma temperatura ainda mais baixa. Assim, acima de 3 μm , o tubo interior e o de vidro trocam radiação como 2 corpos/superfícies opacos, podendo considerar-se cinzentos e difusos nessa gama de comprimentos de onda.

Dessa forma, podemos calcular a potência trocada usando a equação (5.26) para o balanço das trocas entre 2 superfícies cinzentas e difusas (t – tubo interior e v – tubo de vidro):

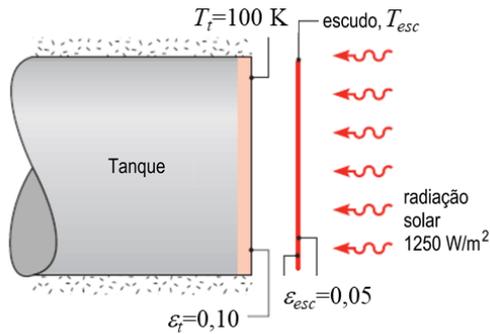
$$\begin{aligned} \dot{Q}_{t-v} &= \frac{\sigma(T_t^4 - T_v^4)}{\frac{1-\varepsilon_t}{A_t\varepsilon_t} + \frac{1}{A_tF_{t-v}} + \frac{1-\varepsilon_v}{A_v\varepsilon_v}} = \frac{\sigma(T_t^4 - T_v^4)A_t}{\frac{1-\varepsilon_t}{\varepsilon_t} + \frac{1}{F_{t-v}} + \frac{A_t(1-\varepsilon_v)}{A_v\varepsilon_v}} = \frac{5,67 \times 10^{-8} \times (325,15^4 - 293,65^4) \times \pi \times 0,05}{\frac{1-\varepsilon_t}{\varepsilon_t} + \frac{1}{1} + \frac{50 \times (1-0,8)}{100 \times 0,8}} = \\ &= \frac{33,324}{\frac{1-\varepsilon_t}{\varepsilon_t} + 1,125} \text{ W/m} \end{aligned}$$

A figura seguinte mostra a variação da potência com ε_t . Obviamente ela aumenta quando a emissividade do tubo interior aumenta. E aumenta de uma forma quase linear.



Para as mesmas temperaturas, a utilização de um revestimento de dióxido de titânio ($\epsilon=0,05$) reduz cerca de 7 vezes a potência perdida em relação à utilização de uma tinta preta corrente ($\epsilon=0,95$). A quase linearidade da curva verifica-se na hipótese de as temperaturas dos 2 tubos se manterem iguais. Na realidade, uma maior potência perdida fará com que a temperatura de equilíbrio do tubo de alumínio baixe, reduzindo em consequência a potência útil transferida para a água que circula no interior do tubo.

P5.18

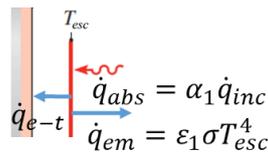


O fundo de um tanque de combustível líquido criogénico de uma nave espacial é protegido da radiação solar através de um escudo metálico fino. O conjunto está situado no espaço (a 0 K). Assumindo o fator de visão entre o escudo e o tanque (a 100 K) igual a 1, e a mesma área, sendo as superfícies cinzentas e difusas, calcule o fluxo de calor que ele recebe.

Compare-o com o fluxo recebido se não for utilizado o escudo (para a mesma temperatura do tanque).

Resolução e discussão

O escudo recebe uma irradiação (solar) de 1250 W/m^2 . Desta, uma parte correspondente ao coeficiente de absorção do escudo é absorvida, sendo a restante refletida e perdida para o espaço. Por sua vez, a face exterior do escudo emite radiação para o espaço, em função da sua temperatura. E a face interior troca radiação com o fundo do depósito, a temperatura diferente. Ou seja, podemos representar o seguinte esquema de fluxos de calor:



que se traduz no balanço:

$$\alpha_1 \dot{q}_{inc} = \epsilon_1 \sigma T_{esc}^4 + \dot{q}_{e-t}$$

$$\alpha_1 \dot{q}_{inc} = \epsilon_1 \sigma T_{esc}^4 + \frac{\sigma(T_{esc}^4 - T_t^4)}{1/\epsilon_2 + 1/\epsilon_t - 1}$$

Substituindo os valores conhecidos:

$$0,05 \times 1250 = 0,05 \times 5,67 \times 10^{-8} \times T_{esc}^4 + \frac{5,67 \times 10^{-8} \times (T_{esc}^4 - 100^4)}{1/0,05 + 1/0,1 - 1}$$

que permite calcular

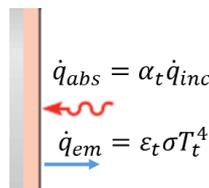
$$T_{esc} = 338,2 \text{ K}$$

O fluxo recebido pelo tanque será então

$$\dot{q}_{e-t} = \frac{\sigma(T_{esc}^4 - T_t^4)}{1/\epsilon_2 + 1/\epsilon_t - 1} = \frac{5,67 \times 10^{-8} \times (338,2^4 - 100^4)}{1/0,05 + 1/0,1 - 1} = 25,4 \text{ W/m}^2$$

fluxo que terá de ser retirado para manter a temperatura do tanque de combustível.

Se não se utilizar escudo de radiação, ter-se-á o seguinte esquema de fluxos



sendo o balanço de energia mais simples:

$$\dot{q}_t = \alpha_t \dot{q}_{inc} - \varepsilon_t \sigma T_t^4 = 0,1 \times 1250 - 0,1 \times 5,67 \times 10^{-8} \times 100^4 = 124,4 \text{ W/m}^2$$

O fluxo recebido sem escudo é cerca de 5 vezes superior ao recebido com escudo, o que aumenta consideravelmente as necessidades de arrefecimento do tanque, para manter o combustível à temperatura desejada. Se o tanque não for arrefecido, a sua temperatura de equilíbrio resultará da igualdade entre $\alpha_t \dot{q}_{inc}$ e $\varepsilon_t \sigma T_t^4$, o que conduzirá a 385 K.

6 Transferência de calor combinada

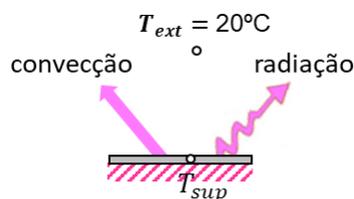
6.1 Considerações gerais

Este capítulo apresenta vários exemplos práticos em que coexistem diferentes modos de transferência de calor. Se bem que tal também ocorra em problemas de capítulos anteriores, como por exemplo na condução com convecção superficial, nos exemplos agora referidos existe um maior número de modos envolvidos. Em particular, a consideração da radiação térmica introduz complicações adicionais, quer nos balanços de energia, quer no método de cálculo para obtenção da solução.

É mais importante nestes problemas a elaboração de um esquema de fluxos de calor ou resistências térmicas, resumindo as condições e apontando para a sua resolução.

6.2 Problemas práticos resolvidos (P6.1 a P6.17)

P6.1



Uma placa pode ser mantida em equilíbrio a diferentes temperaturas, variando a potência de aquecimento que lhe é fornecida. A placa, colocada horizontalmente, pode considerar-se a uma temperatura uniforme, e transfere calor na sua superfície superior, por convecção e por radiação, sendo a temperatura do ar e de todas as superfícies exteriores de 20°C.

A placa, com 1m x 1m, pode considerar-se como cinzenta e difusa, com emissividade igual a 0,9. Analise a variação dos coeficientes de transferência de calor por convecção e por radiação, quando a temperatura varia entre 20 e 200°C. Considere 2 hipóteses para a convecção: convecção forçada, com um coeficiente de 20 W/m²K, e convecção natural.

Resolução e discussão

Trata-se de comparar coeficientes de transferência de calor pelos 2 modos. No caso da convecção forçada o coeficiente só depende da temperatura na medida em que as propriedades variam com a temperatura. Mas para o ar as variações não são muito significativas, e vamos supôr um coeficiente de convecção forçada constante com a temperatura da superfície. O valor dado, de 20 W/m²K, é típico de uma placa situada num ambiente exterior e sujeita à ação do vento.

Existindo convecção natural, o coeficiente de convecção depende da diferença de temperatura ($T_{sup} - T_{ext}$), como se viu na secção 2.4, e pode calcular-se através dos números de Grashoff e Nusselt. Considerando o caso de uma placa horizontal perdendo calor na face superior, a Tabela 2.4 apresenta 2 correlações para diferentes intervalos de $Gr.Pr$:

$$Nu = 0,54 (Gr.Pr)^{1/4}, \text{ para } 10^4 < Gr.Pr \leq 10^7$$

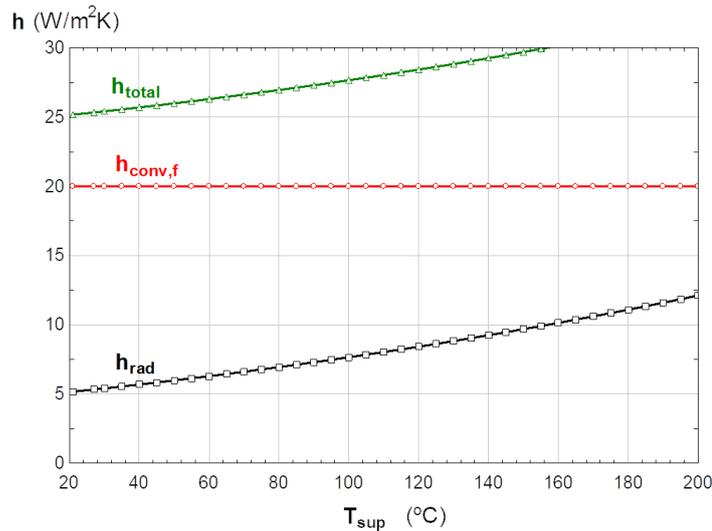
$$Nu = 0,15 (Gr.Pr)^{1/3}, \text{ para } 10^7 < Gr.Pr \leq 10^{11}$$

Para as (diferenças de) temperaturas verificadas, existem valores nos 2 intervalos, sendo $Gr.Pr > 10^7$ a partir de $T_{sup} = 27^\circ\text{C}$. A placa tem $L_c = A/P = 0,25$ m. Foram variadas as propriedades do ar, utilizando em cada caso a temperatura média entre a superfície e o ar.

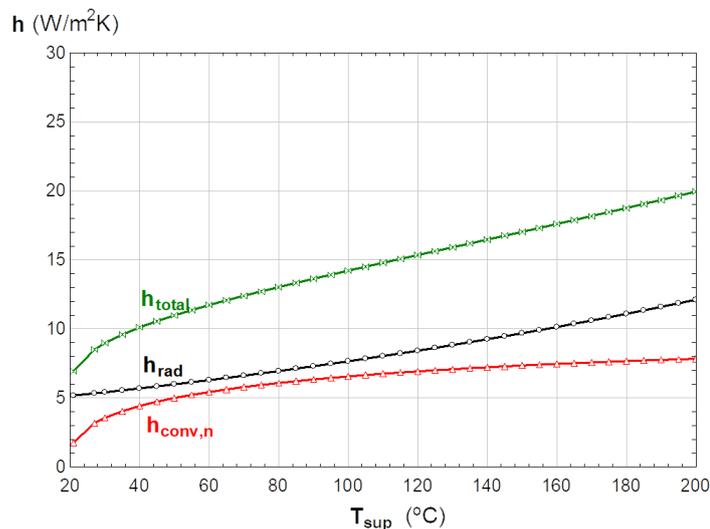
Quanto ao coeficiente de radiação, foi calculado a partir da potência radiativa trocada entre a superfície e as superfícies exteriores, considerando que estas têm uma área muito superior, comportando-se como um corpo negro em relação à superfície. Desse modo:

$$h_{rad} = \frac{\dot{q}_{rad}}{(T_{sup}-T_{ext})} = \frac{\varepsilon_{sup}\sigma(T_{sup}^4-T_{ext}^4)}{(T_{sup}-T_{ext})} = \frac{0,9 \times 5,67 \times 10^{-8} \times (T_{sup}^4 - 293,15^4)}{(T_{sup} - 293,15)}$$

O gráfico seguinte compara a evolução dos coeficientes de convecção forçada e radiação quando a temperatura da superfície varia. Representa-se também o coeficiente total, igual à soma dos dois. Claro que o de convecção não varia, por se ter assumido um valor constante. O coeficiente de convecção forçada é sempre superior, e apenas para uma diferença de temperaturas acima de 130°C é que a radiação tem um peso maior que 50% da convecção. E note-se que o coeficiente de radiação já foi calculado com uma emissividade elevada (0,9).

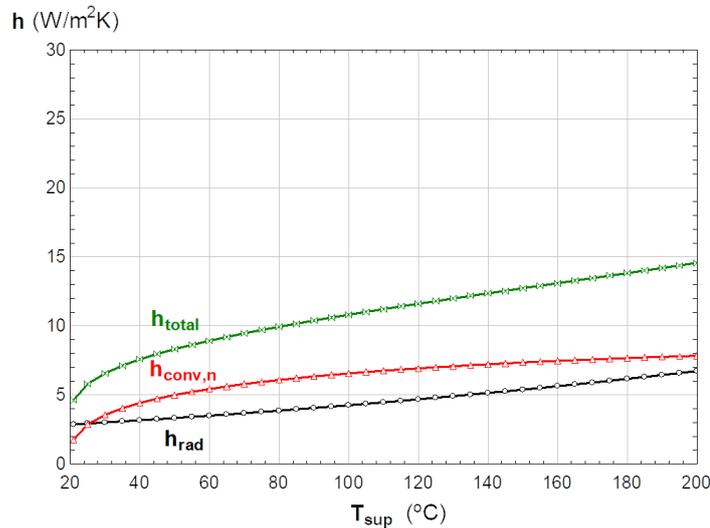


O gráfico seguinte compara os coeficientes de convecção natural e radiação.



Quando há convecção natural, é a radiação que passa a ter um peso maior (para a emissividade considerada). E o peso acentua-se para uma diferença de temperaturas a partir dos 100°C, porque o coeficiente de radiação cresce mais rapidamente que o de convecção natural.

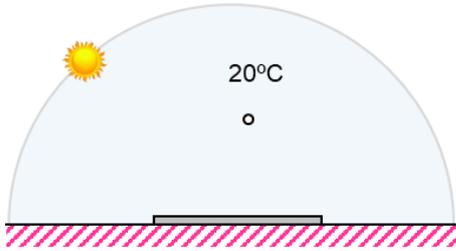
Se a emissividade da superfície for menor o peso da radiação será evidentemente menor. Considerando $\varepsilon_{sup} = 0,5$, obtiveram-se os valores do gráfico seguinte.



O coeficiente de radiação passa a ser menor que o de convecção natural, aproximando-se mais para temperaturas mais elevadas.

A principal conclusão é a de que quando há convecção natural e radiação em simultâneo (paralelo), não se pode desprezar o modo da radiação. Quando há convecção forçada e radiação, esta é menos importante, sobretudo para (diferenças de) temperaturas mais baixas.

P6.2



Uma placa metálica está colocada horizontalmente no exterior, com a face superior em contacto com ar a 20°C, com um coeficiente de convecção igual a 20 W/m²K. A face inferior pode considerar-se isolada. Todas as superfícies exteriores e a atmosfera se podem considerar à mesma temperatura do ar.

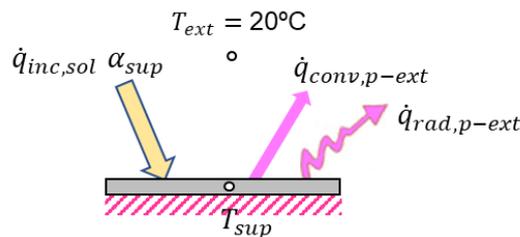
A placa recebe uma irradiação solar de 1000 W/m². Calcule a temperatura de equilíbrio da superfície da placa nas seguintes hipóteses:

- a superfície está pintada com tinta negra corrente, que pode ser considerada cinzenta e difusa, com $\epsilon_{sup} = \alpha_{sup} = 0,95$;
- a superfície está pintada com tinta negra seletiva, para a qual se tem $\alpha_{sup} = 0,92$ para a radiação solar e $\epsilon_{sup} = \alpha_{sup} = 0,08$ para a radiação emitida e trocada com o exterior;
- a superfície está pintada com tinta branca corrente, para a qual se tem $\alpha_{sup} = 0,15$ para a radiação solar e $\epsilon_{sup} = \alpha_{sup} = 0,90$ para a radiação emitida e trocada com o exterior.

Resolução e discussão

Trata-se de um problema em regime permanente, trocando a superfície da placa calor com o exterior por convecção (ar) e radiação (superfícies e atmosfera).

A figura seguinte representa os fluxos envolvidos, que nas várias situações a considerar diferem apenas nas propriedades radiativas.



Note-se que da irradiação solar na superfície, esta apenas retém a porção absorvida, uma vez que a que reflete se perde para o exterior. Quanto à radiação trocada entre a superfície da placa e as superfícies exteriores, podemos considerar que se trata de uma superfície muito pequena, rodeada por uma muito grande. A equação de balanço térmico da superfície será então:

$$\dot{q}_{inc,sol} \alpha_{sup} = \dot{q}_{conv,p-ext} + \dot{q}_{rad,p-ext}$$

$$1000 \times \alpha_{sup} = 20 \times (T_{sup} - 293,15) + \epsilon_{sup} \times 5,67 \times 10^{-8} \times (T_{sup}^4 - 293,15^4)$$

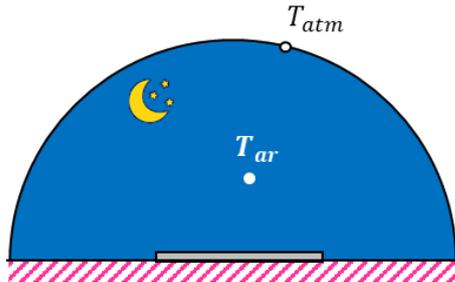
equação (não linear) a partir da qual se pode calcular a temperatura da superfície, para cada conjunto de propriedades.

A tabela seguinte resume os resultados obtidos.

Revestimento	Propriedades radiativas	Temperatura de equilíbrio (°C)
tinta negra corrente	$\epsilon_{sup} = \alpha_{sup} = 0,95$	55,8°C
tinta negra seletiva	$\alpha_{sup,sol} = 0,95; \epsilon_{sup} = 0,08$	66,2°C
tinta branca corrente	$\alpha_{sup,sol} = 0,15; \epsilon_{sup} = 0,90$	25,9°C

A tinta negra seletiva, absorvendo a mesma radiação solar que a tinta negra corrente, tem muito menos facilidade em perder calor por radiação, pelo que a sua temperatura de equilíbrio é cerca de 10°C mais alta. Já a tinta branca absorve muito menos radiação solar, e tem uma emissividade elevada, pelo que ficará a uma temperatura bastante mais baixa, muito próxima da ambiente.

P6.3



Uma placa metálica está colocada horizontalmente no exterior durante a noite, com a face superior em contacto com ar calmo. A sua face superior troca radiação apenas com a atmosfera, podendo considerar-se cinzenta e difusa, e a sua face inferior pode considerar-se isolada. A placa tem 1m x 1m.

Considerando a diferença entre a temperatura do ar e da atmosfera, encontre a temperatura de equilíbrio da placa para diferentes temperaturas do ar. Admita 2 emissividades para a placa: 0,1 e 0,9.

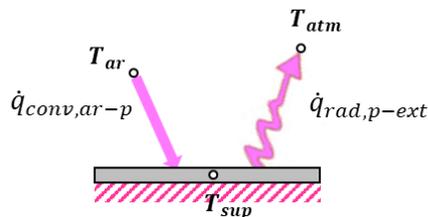
Resolução e discussão

A placa encontra-se em regime permanente, trocando calor com o exterior por convecção (ar) e radiação (atmosfera). Como se viu em 5.5.2, pode relacionar-se a temperatura efetiva da atmosfera, considerada como uma superfície envolvente de área muito grande, com a do ar ambiente exterior, através das correlações

$$T_{atm} = T_{ar} - 6, \text{ em condições de céu nublado}$$

$$T_{atm} = 0,0552 T_{ar}^{1,5}, \text{ em condições de céu limpo (com } T \text{ em K)}$$

Sendo a temperatura da atmosfera inferior à do ar, e não havendo qualquer fonte de calor externa, a placa atingirá o equilíbrio térmico através das trocas de calor na face superior (a inferior está isolada e desprezam-se os topos). Assim, em equilíbrio atingirá uma temperatura intermédia, entre a do ar e a da atmosfera. Como representa a figura seguinte, a superfície da placa receberá calor do ar por convecção (natural) e perderá calor por radiação (balanço das trocas nos 2 sentidos entre a placa e a atmosfera).



Na convecção natural verifica-se que a face superior da placa recebe calor, pelo que podemos aplicar a correlação da Tabela 2.4:

$$Nu = 0,27 (Gr \cdot Pr)^{1/4}, \text{ para } 10^5 \leq Gr \cdot Pr \leq 10^{11}$$

O número de Grashoff é calculado com uma dimensão característica $L_c = A/P = 0,25$ m.

Quanto às trocas de radiação térmica, podemos considerar uma superfície muito pequena (face superior da placa) rodeada por outra com área muito grande (atmosfera).

Vamos então escrever o balanço térmico em equilíbrio:

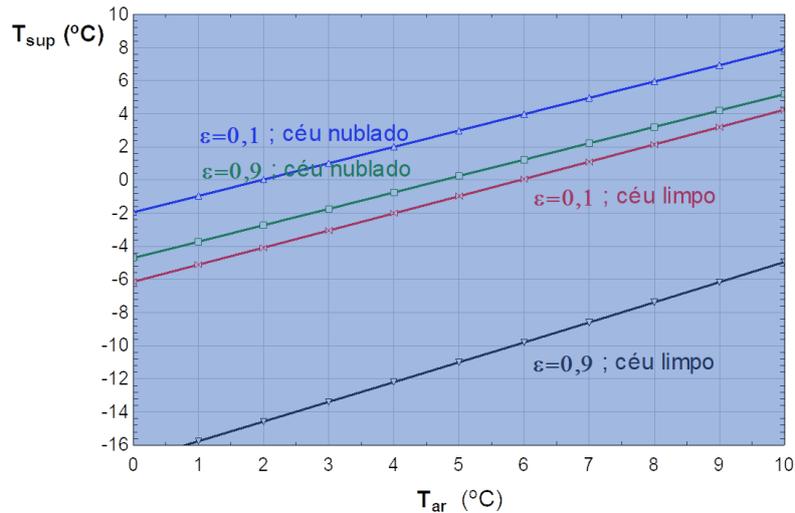
$$h_{cn}(T_{ar} - T_{sup}) = \varepsilon_{sup}\sigma(T_{sup}^4 - T_{atm}^4)$$

$$\frac{k}{L_c} 0,27 (Gr_{L_c} \cdot Pr)^{1/4} (T_{ar} - T_{sup}) = \varepsilon_{sup}\sigma(T_{sup}^4 - T_{atm}^4)$$

Desta igualdade, tendo em conta as propriedades do ar e que o Gr também depende da diferença de temperatura, podemos calcular a T_{sup} .

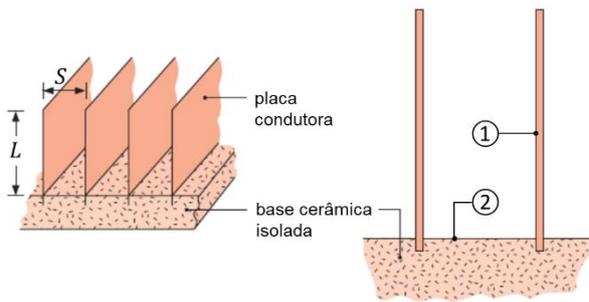
Vamos considerar temperaturas do ar, entre 0 e 10°C, considerando uma noite de Inverno. Nesse caso, de acordo com as condições de nebulosidade, a temperatura da atmosfera variará entre -24 e -6°C (para $T_{ar} = 0^\circ\text{C}$) e entre -10 e -4°C (para $T_{ar} = 10^\circ\text{C}$).

O gráfico seguinte apresenta a temperatura superficial da placa para ambas as condições de nebulosidade e para ambas as emissividades (0,1 e 0,9), ao variar a temperatura do ar exterior. A placa atinge temperaturas muito inferiores às do ar para a maior emissividade (0,9) e em condições de céu limpo, chegando a atingir 15 a 17°C menos que a temperatura do ar; para a maior emissividade e céu nublado a placa fica cerca de 5°C mais fria que o ar. Para $\epsilon_{sup} = 0,1$, com céu limpo a placa fica cerca de 6°C mais fria, e com céu nublado cerca de 2°C mais fria.



Este efeito de arrefecimento da placa é conhecido por arrefecimento radiativo. É por esse efeito que se torna possível congelar água, exposta a ar calmo e à atmosfera, mesmo quando o ar tem uma temperatura bastante superior a 0°C. A água tem uma emissividade de cerca de 0,9, podendo, nas condições deste problema, atingir os 0°C com o ar a 5°C (céu nublado) ou mesmo a 14°C (céu limpo).

P6.4



As placas condutoras elétricas da figura têm uma altura (L) de 40 mm e uma largura muito maior, e estão encastradas numa base cerâmica isolada. Têm um espaçamento entre si de 10 mm (S). A passagem da corrente elétrica mantém a sua temperatura T_1 a 500 K (podendo considerar-se uniforme). As placas estão situadas numa sala cujas superfícies se encontram a 300 K.

Quer as placas quer a base são cinzentas e difusas, com $\varepsilon_1 = 0,8$ e $\varepsilon_2 = 0,6$.

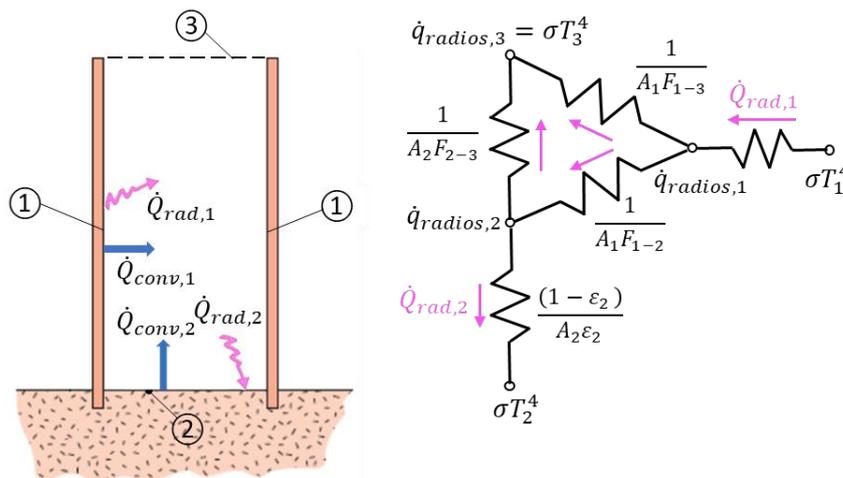
As placas estão sujeitas a uma corrente de ar a 300 K que provoca um coeficiente de convecção em todas as superfícies de $25 \text{ W/m}^2\text{K}$.

Calcule a potência que se dissipa em cada placa (por metro de largura), e calcule a temperatura T_2 .

Resolução e discussão

Temos transferência de calor das placas e da base por radiação térmica (entre si e com o exterior) e por convecção com o ar. A espessura das placas é desprezável.

Vamos considerar o espaço entre placas intermédias, e para contabilizar adequadamente as trocas de radiação vamos considerar uma superfície virtual (3) que fecha o volume entre placas. A figura a seguir representa as 3 superfícies, as potências caloríficas de radiação (balanço de cada superfície) e convecção, e as resistências de radiação associadas. A superfície 3, que corresponde às superfícies exteriores, devido à área muito superior destas relativamente a 1 e a 2 tem um comportamento de corpo negro.



Note-se que havendo simetria dos 2 lados de cada placa, as potências transferidas numa placa são iguais às transferidas nas 2 superfícies consideradas como superfície 1. Note-se também que estando a superfície 2 (base) isolada, as potências de convecção e radiação têm de ter sinal contrário, de forma a traduzir o seu equilíbrio térmico.

Podemos escrever o balanço da base (2):

$$h_{conv}A_2(T_2 - T_{ar}) = \frac{\dot{q}_{radios,2} - \sigma T_2^4}{\frac{1-\varepsilon_2}{A_2\varepsilon_2}}$$

Quanto ao balanço das placas (1), elas receberão a mesma potência total que perdem por radiação e convecção:

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_{conv,1} + \dot{Q}_{rad,1} = h_{conv}A_1(T_1 - T_{ar}) + \frac{\sigma T_1^4 - \dot{q}_{radios,1}}{\frac{1-\varepsilon_1}{A_1\varepsilon_1}}$$

Quanto às radiosidades, fazendo o balanço dos nodos radiosidade da figura acima tem-se

$$\frac{\sigma T_1^4 - \dot{q}_{radios,1}}{\frac{1-\varepsilon_1}{A_1\varepsilon_1}} = \frac{\dot{q}_{radios,1} - \dot{q}_{radios,2}}{\frac{1}{A_1F_{1-2}}} + \frac{\dot{q}_{radios,1} - \sigma T_3^4}{\frac{1}{A_1F_{1-3}}}$$

$$\frac{\dot{q}_{radios,2} - \sigma T_2^4}{\frac{1-\varepsilon_2}{A_2\varepsilon_2}} = \frac{\dot{q}_{radios,1} - \dot{q}_{radios,2}}{\frac{1}{A_1F_{1-2}}} - \frac{\dot{q}_{radios,2} - \sigma T_3^4}{\frac{1}{A_2F_{2-3}}}$$

Podemos então substituir nas equações acima T_1 e T_3 , as áreas e propriedades conhecidas, e calcular os fatores de visão que permitem calcular as 4 incógnitas: $\dot{q}_{radios,1}$, $\dot{q}_{radios,2}$, T_1 e \dot{Q}_1 . Os fatores de visão necessários são F_{1-2} , F_{1-3} e F_{2-3} . Quanto a F_{2-3} , podemos usar a expressão da Figura 5.7 (largura infinita), com $W_i = W_j = 10/40 = 0,25$, vindo

$$F_{2-3} = \frac{((0,25+0,25)^2 + 4)^{1/2} - (0^2 + 4)^{1/2}}{2 \times 0,25} = 0,1231$$

Quanto a F_{3-2} é igual a F_{2-3} , e F_{3-1} é o complementar de F_{3-2} para 1, pelo que $F_{3-1} = 0,8769$. Então pode obter-se F_{1-3} da relação de reciprocidade:

$$F_{1-3} = \frac{A_3 F_{3-1}}{A_1} = \frac{10 \times 0,8769}{2 \times 40 \times 1} = 0,1096$$

Quanto a F_{1-2} é igual a F_{1-3} , por simetria. Temos então todos os fatores necessários.

O sistema de equações a resolver é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sigma 500^4 - \dot{q}_{radios,1}}{\frac{1-0,8}{0,8}} = \frac{\dot{q}_{radios,1} - \dot{q}_{radios,2}}{\frac{1}{0,1096}} + \frac{\dot{q}_{radios,1} - \sigma 300^4}{\frac{1}{0,1096}} \\ \frac{\dot{q}_{radios,2} - \sigma T_2^4}{\frac{1-0,6}{0,01 \times 0,6}} = \frac{\dot{q}_{radios,1} - \dot{q}_{radios,2}}{\frac{1}{2 \times 0,04 \times 0,1096}} - \frac{\dot{q}_{radios,2} - \sigma 300^4}{\frac{1}{0,01 \times 0,1231}} \\ 25 \times (T_2 - 300) = \frac{\dot{q}_{radios,2} - \sigma T_2^4}{\frac{1-0,6}{0,6}} \\ \dot{Q}_1 = 25 \times 2 \times 0,04 \times (500 - 300) + \frac{\sigma 500^4 - \dot{q}_{radios,1}}{\frac{1-0,8}{2 \times 0,04 \times 0,8}} \end{array} \right.$$

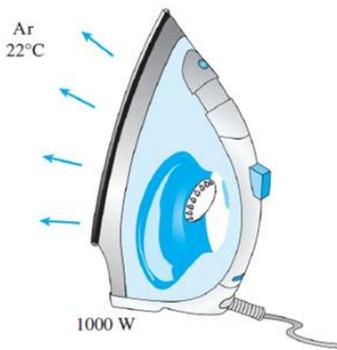
que conduz aos resultados:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_{radios,1} = 3417 \text{ W/m}^2 \\ \dot{q}_{radios,2} = 1745 \text{ W/m}^2 \\ T_2 = 352 \text{ K} \\ \dot{Q}_1 = 400 + 41 = 441 \text{ W/m} \end{array} \right.$$

Note-se que a potência transferida pelas placas por convecção é bastante superior à transferida por radiação: esta representa menos de 10% do total. Apesar da elevada temperatura das placas, como elas se encontram bastante próximas entre si (10 mm), a perda radiativa para o exterior e

para a base é bastante baixa – o fator de visão das placas para o exterior, igual ao das placas para a base, é apenas igual a cerca de 0,11, ou de outra forma, o fator de visão das placas para si próprias é igual a cerca de 0,78. A base (superfície 2), não tendo fontes de calor, transfere a mesma potência por convecção e por radiação (equação de equilíbrio vista); mas em consequência fica a uma temperatura de equilíbrio bastante mais próxima da do ar.

No caso da utilização de alhetas retangulares (geometricamente semelhantes às placas vistas neste problema) ou circulares, que estão normalmente muito próximas entre si, as trocas por radiação têm também um peso pequeno por comparação com a convecção.

P6.5

A base de um ferro de engomar é uma placa com uma espessura de 7 mm e uma área de $0,040 \text{ m}^2$, feita em liga de alumínio ($\rho=2800 \text{ kg/m}^3$, $c_p=900 \text{ J/kgK}$, $k=180 \text{ W/m}^2\text{K}$). Tem uma resistência elétrica ligada à superfície interior da base, que lhe fornece uma potência de 500 W. A superfície exterior da base está em contacto com ar calmo a 25°C , e todas as superfícies do local se encontram também a 25°C . A base pode considerar-se cinzenta e difusa, com $\varepsilon = 0,8$, e tem uma altura média de 25 cm.

Calcule o tempo necessário a que, após ligado, o ferro atinja a temperatura de 135°C .

Resolução e discussão

Trata-se de uma alteração ao problema P1.20, no qual era dado um coeficiente de transferência de calor entre a base do ferro e o exterior constante no tempo (igual a $18 \text{ W/m}^2\text{K}$).

Vamos admitir novamente que a base pode ser tratada como um sistema global, a temperatura uniforme, o que poderemos verificar mais tarde.

Neste caso vamos escrever o balanço instantâneo da base do ferro, considerando as trocas de calor por convecção com o ar e por radiação trocada com as superfícies da sala (consideradas todas como uma única superfície com área muito maior):

$$\rho V c_p \frac{dT}{dt} = \dot{Q} - h A_{base} (T - T_\infty) - \varepsilon \sigma A_{base} (T^4 - T_{ext}^4)$$

Note-se que o coeficiente de convecção (h) não é constante, pois existe convecção natural que o torna dependente da diferença de temperaturas. Considerando que se trata de convecção natural numa placa vertical podemos usar a correlação da Tabela 2.4:

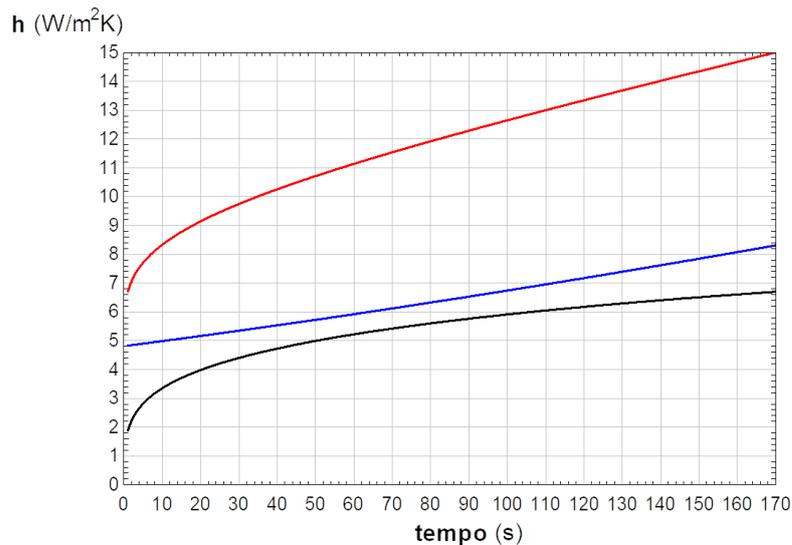
$$Nu = 0,59 (Gr.Pr)^{1/4}, \text{ válida para } 10^4 < Gr.Pr \leq 10^9$$

sendo o Gr calculado com a dimensão característica igual à altura da placa (L), neste caso igual a 0,25 m. Com efeito, considerando propriedades do ar à temperatura média aritmética entre a média (base/ar) no início e no final, ou seja a $52,5^\circ\text{C}$ (e à pressão atmosférica) – $\rho=1,07 \text{ kg/m}^3$, $k=0,02754 \text{ W/mK}$, $\mu=1,975 \times 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$, $Pr = 0,7216$, $\beta = 0,003071 \text{ K}^{-1}$ – verifica-se que se tem $Gr.Pr$ acima de 10^4 a partir de uma temperatura da base de $25,1^\circ\text{C}$, e que mesmo no final (com $T = 135^\circ\text{C}$), se tem $Gr < 10^9$, com $h = 6,6 \text{ W/m}^2\text{K}$.

Usando as propriedades do ar acima referidas podemos escrever h em função de T , e a equação para a variação da temperatura como:

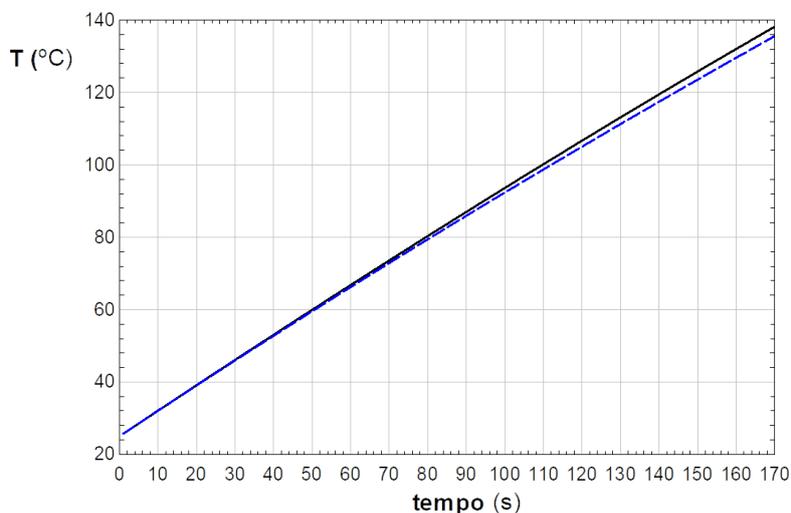
$$\rho V c_p \frac{dT}{dt} = \dot{Q} - 2,053 A_{base} (T - T_\infty)^{5/4} - \varepsilon \sigma A_{base} (T^4 - T_{ext}^4)$$

Esta equação não tem solução analítica (exata). Pode, no entanto, obter-se uma solução numérica (aproximada), calculando a evolução de T em diferentes instantes de tempo. Foi aplicado o método semi-implícito ou de Crank-Nicolson, a partir do instante inicial ($T = 25^\circ\text{C}$), usando um passo de 1 segundo. A figura seguinte mostra a evolução dos 2 coeficientes de transferência de calor: o de convecção natural e o de radiação (fluxo radiativo dividido pela diferença de temperatura). Mostra ainda o coeficiente global, resultado da soma dos 2 individuais.



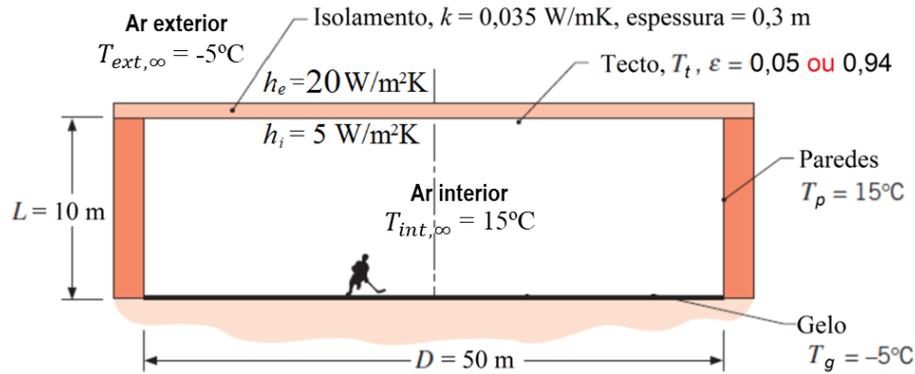
Como se esperava, ambos os coeficientes aumentam ao aumentar a diferença de temperatura entre a base e o exterior. O coeficiente de radiação (curva a azul) é superior ao de convecção (curva a preto), e cresce mais rapidamente. O coeficiente global atinge $15 W/m^2K$ ao fim de 170 s (2,83 minutos). Este valor é inferior aos $18 W/m^2K$ do problema P1.20, o que valida a hipótese sistema global.

A figura seguinte mostra a evolução da temperatura da base do ferro, e a sua comparação com a evolução nas condições do problema P1.20, com um coeficiente global constante de $18 W/m^2K$ (curva a traço interrompido). A base do ferro atinge os $135^\circ C$ ao fim de 165 s.



No problema P1.20, atingiam-se os $135^\circ C$ ao fim de 169 s, valor que também se verifica ao aplicar o mesmo método numérico à integração da equação que dá a variação de temperatura no tempo. Em ambos os casos as evoluções são muito próximas, com a temperatura ligeiramente mais baixa quando o coeficiente é constante, por ser mais elevado que os coeficientes variáveis (há mais perdas para o exterior). A pequena diferença deve-se a que o peso das perdas é bastante mais baixo que o da potência fornecida, de 500 W. A perda máxima, quando o coeficiente global de transferência é já de cerca de $15 W/m^2K$ (nos instantes finais), é de cerca de 65 W, muito inferior aos 500 W fornecidos. Por isso as curvas estão próximas e têm uma evolução que não se afasta muito da linear (a que aconteceria se não houvesse perdas para o exterior).

P6.6



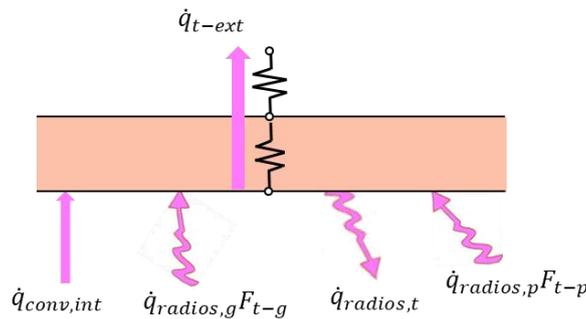
No rinque de patinagem da figura, com um diâmetro de 50 m, pretende-se avaliar a ocorrência de condensação no teto, o que acontece se a sua temperatura for inferior a 9,4°C. As paredes e o piso de gelo comportam-se como corpos negros. Avalie a utilização no teto de painéis refletores ($\epsilon = \alpha = 0,05$) ou painéis pintados ($\epsilon = \alpha = 0,94$). Os coeficientes de convecção no interior e no exterior do teto estão indicados na figura, bem como as respetivas temperaturas.

De seguida considere que as paredes têm $\epsilon = \alpha = 0,8$, mantendo-se o gelo como um corpo negro, e refaça os cálculos.

Resolução e discussão

Temos de avaliar a temperatura da face interior do teto, de modo a verificar se existe condensação. Para tal, temos de contabilizar as trocas de calor que essa face tem. Para o exterior ela transfere calor por condução através da sua espessura (sendo a resistência significativa a de 30 cm de isolante), e depois da face exterior para o ar. No interior ela troca calor com o ar por convecção e com as restantes superfícies por radiação. Podemos reduzir as restantes superfícies a 2: o piso de gelo (a -5°C) e as superfícies das paredes laterais (a 15°C). No interior há, portanto, trocas radiativas entre 3 superfícies que formam um volume fechado.

O esquema seguinte representa os fluxos envolvidos no teto.



Podemos então escrever o balanço dos fluxos que chegam e saem da face interior do teto:

$$\dot{q}_{conv,i} + \dot{q}_{radios,g} F_{t-g} + \dot{q}_{radios,p} F_{t-p} = \dot{q}_{radios,t} + \dot{q}_{t-ext}$$

e, substituindo as radiosidades do gelo e paredes (corpos negros), e usando as 2 resistências em série para o exterior:

$$h_{int}(T_{int} - T_t) + \sigma T_g^4 F_{t-g} + \sigma T_p^4 F_{t-p} = \dot{q}_{radios,t} + \frac{T_t - T_{ext}}{\frac{e_t}{k_t} + \frac{1}{h_{ext}}}$$

Quanto à radiosidade da superfície interior do teto podemos escrever a soma da radiação emitida e refletida:

$$\dot{q}_{radios,t} = \varepsilon_t \sigma T_t^4 + (1 - \varepsilon_t)(\sigma T_g^4 F_{t-g} + \sigma T_p^4 F_{t-p})$$

Substituindo esta última equação na anterior obtém-se

$$h_{int}(T_{int} - T_t) + \varepsilon_t \sigma T_g^4 F_{t-g} + \varepsilon_t \sigma T_p^4 F_{t-p} = \varepsilon_t \sigma T_t^4 + \frac{T_t - T_{ext}}{(e_t/k_t) + 1/h_{ext}}$$

equação que permite calcular T_t depois de se calcularem os fatores F , uma vez que se conhecem as restantes temperaturas, propriedades e coeficientes. ε_t pode ser igual a 0,05 ou 0,94, consoante se trate de painéis refletores ou painéis pintados. O fator de visão F_{t-g} pode calcular-se para 2 discos paralelos, com 50 m de diâmetro e à distância de 10 m; usando a Figura 5.11 obtém-se um valor igual a 0,672. O fator F_{t-p} é igual ao complementar para 1, ou seja, é igual a 0,328.

Então, a equação a resolver é:

$$\begin{aligned} 5 \times (288,15 - T_t) + \left(\begin{matrix} 0,05 \\ 0,94 \end{matrix} \right) \times \sigma \times 268,15^4 \times 0,672 + \sigma \times 288,15^4 \times 0,328 = \\ = \left(\begin{matrix} 0,05 \\ 0,94 \end{matrix} \right) \sigma T_t^4 + \frac{T_t - 268,15}{(0,3/0,035) + 1/20} \end{aligned}$$

equação não linear, que por método iterativo conduz aos resultados:

$$\left(\begin{matrix} \varepsilon_t = 0,05 \Rightarrow T_t = 14,0^\circ\text{C}, \dot{q}_{t-ext} = 2,2 \text{ W/m}^2, \dot{Q}_{t-ext} = 4327 \text{ W} \\ \varepsilon_t = 0,94 \Rightarrow T_t = 8,6^\circ\text{C}, \dot{q}_{t-ext} = 1,6 \text{ W/m}^2, \dot{Q}_{t-ext} = 3097 \text{ W} \end{matrix} \right)$$

Assim, irá verificar-se condensação no teto se se usarem painéis pintados, devendo optar-se por painéis refletores. Essa opção terá como consequência um aumento significativo da potência calorífica perdida para o exterior, ou seja, um aumento da potência de aquecimento do recinto, de modo a assegurar a manutenção das suas condições interiores. Poderá optar-se por painéis de baixa emissividade, mas não tão baixa como 0,05.

Vamos agora considerar que as paredes não se comportam como um corpo negro, tendo $\varepsilon = \alpha = 0,8$. A sua radiosidade deixa de ser igual à de um corpo negro (σT_p^4), passando a ter de ser calculada através da soma da radiação emitida e refletida:

$$\dot{q}_{radios,p} = \varepsilon_p \sigma T_p^4 + (1 - \varepsilon_p)(\sigma T_g^4 F_{p-g} + \dot{q}_{radios,t} F_{p-t} + \dot{q}_{radios,p} F_{p-p})$$

não esquecendo que como a superfície é circular, envia radiação para si própria.

Temos então um sistema de 3 equações, juntamente com a equação da radiosidade da superfície interior do teto e a respetiva equação de balanço:

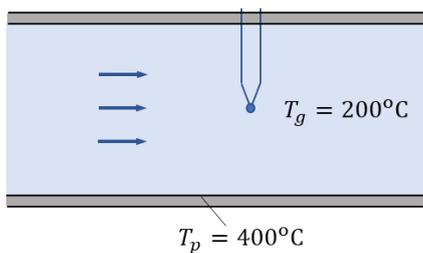
$$h_{int}(T_{int} - T_t) + \sigma T_g^4 F_{t-g} + \dot{q}_{radios,p} F_{t-p} = \dot{q}_{radios,t} + \frac{T_t - T_{ext}}{\frac{e_t}{k_t} + \frac{1}{h_{ext}}}$$

Substituindo os valores conhecidos e resolvendo o sistema obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_t = \left(\begin{matrix} \varepsilon_t = 0,05 \Rightarrow 13,9^\circ\text{C} \\ \varepsilon_t = 0,94 \Rightarrow 8,3^\circ\text{C} \end{matrix} \right) \\ \dot{q}_{radios,t} = \left(\begin{matrix} \varepsilon_t = 0,05 \Rightarrow 323,8 \text{ W/m}^2 \\ \varepsilon_t = 0,94 \Rightarrow 353,6 \text{ W/m}^2 \end{matrix} \right) \\ \dot{q}_{radios,p} = \left(\begin{matrix} \varepsilon_t = 0,05 \Rightarrow 376,9 \text{ W/m}^2 \\ \varepsilon_t = 0,94 \Rightarrow 379,4 \text{ W/m}^2 \end{matrix} \right) \end{array} \right.$$

Os valores da temperatura do teto são muito semelhantes aos anteriores. A troca radiativa dominante é a devida ao gelo (a -5°C), pelo que a emissividade das paredes tem uma pequena influência na temperatura do teto.

P6.7

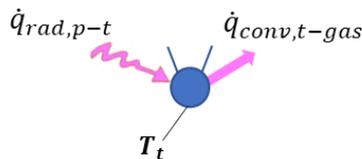


Pretende medir-se a temperatura de um escoamento de gás a 200°C numa conduta cujas paredes estão a 400°C, com um termopar cuja junção se assemelha a uma esfera com as propriedades: $D = 0,7 \text{ mm}$, $\rho = 8500 \text{ kg/m}^3$, $c_p = 400 \text{ J/kgK}$, $\varepsilon = \alpha = 0,9$. O gás é um meio não participante na radiação.

Calcule a temperatura de equilíbrio da junção sabendo que o coeficiente de convecção é igual a $400 \text{ W/m}^2\text{K}$, e o tempo necessário a que ela atinja uma diferença de 1°C para essa temperatura, sabendo que o termopar é introduzido no escoamento a 25°C.

Resolução e discussão

A junção do termopar tem trocas convectivas com o escoamento de ar e trocas radiativas com a parede da conduta. Em equilíbrio, o balanço radiativo iguala o convectivo, e como a parede da conduta está mais quente que o gás, a junção ficará a uma temperatura intermédia, como representa a figura seguinte.



Então podemos escrever o seguinte balanço para a situação de equilíbrio (regime permanente):

$$hA_t(T_g - T_{t,eq}) + \varepsilon_t\sigma(T_p^4 - T_{t,eq}^4)A_t = 0$$

considerando para as trocas de radiação que a área das paredes da conduta é muito superior à área da esfera do termopar; a equação traduz-se, por unidade de área, em

$$400 \times (473,15 - T_{t,eq}) + 0,9 \times 5,67 \times 10^{-8} \times (673,15^4 - T_{t,eq}^4) = 0$$

e que permite calcular a temperatura de equilíbrio:

$$T_{t,eq} = 218,7^\circ\text{C}$$

valor que mostra a influência da radiação trocada com a parede da conduta na medição da temperatura do gás. Note-se que essa influência aumenta se a velocidade do gás diminuir (ou seja, se o coeficiente de convecção diminuir).

Na situação instacionária o termopar vai aumentar a sua temperatura até atingir o equilíbrio térmico. Atendendo à pequena dimensão e às propriedades da junção esférica do termopar, podemos admitir que se trata de um sistema global, pelo que podemos escrever:

$$\rho c_p V \frac{dT_t}{dt} = hA_t(T_g - T_t) + \varepsilon_t\sigma A_t(T_p^4 - T_t^4)$$

Esta equação não tem uma solução exata (analítica). Podemos, no entanto, usar um método numérico para encontrar a evolução temporal da temperatura assinalada pelo termopar (T_t) desde o instante inicial, quando é igual a 25°C. Obtém-se uma temperatura de 217,7°C (1°C abaixo da de equilíbrio) ao fim de 5 segundos. A resposta do termopar é muito rápida pela sua reduzida constante de tempo (inércia térmica).

P6.8



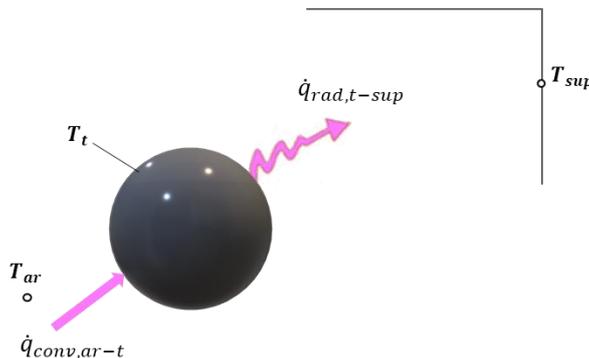
A figura mostra um termómetro de bolbo negro, que regista a temperatura superficial de uma esfera plástica pintada de preto, cinzenta e difusa com $\varepsilon = \alpha = 0,95$, e com um diâmetro de 10 cm. O bolbo está rodeado por ar calmo à temperatura de 20°C, e encontra-se numa sala cujas superfícies estão todas as 16°C.

Nessas condições, calcule a temperatura de equilíbrio lida pelo termómetro.

Calcule a temperatura registada se a temperatura das superfícies da sala estiver entre 16 e 24°C, para a mesma temperatura do ar. Será que o diâmetro da esfera afeta a medição? E a sua emissividade?

Resolução e discussão

Em equilíbrio, a superfície esférica do termómetro troca calor por convecção (natural) com o ar e por radiação com as superfícies da sala. O balanço radiativo iguala o convectivo, e como as superfícies da sala estão a uma temperatura diferente da do ar, o termómetro ficará a uma temperatura intermédia, como representa a figura seguinte. Se as superfícies estiverem mais frias que o ar, o termómetro indicará uma temperatura inferior à do ar.



O balanço térmico para a situação de equilíbrio (regime permanente) é:

$$h_{conv}A_t(T_{ar} - T_t) = \varepsilon_t\sigma(T_t^4 - T_{sup}^4)A_t$$

considerando para as trocas de radiação que a área das superfícies da sala é muito superior à área da esfera do termómetro.

Substituindo os valores conhecidos, e usando a correlação da Tabela 2.4 para o coeficiente de convecção natural em função da temperatura (Gr_D depende da diferença de temperatura, devendo ser $Gr_D Pr \leq 10^{11}$ e $Pr \geq 0,7$ – a verificar posteriormente), tem-se:

$$\frac{k_{ar}}{0,10} \left(2 + \frac{0,589 (Gr_D Pr)^{1/4}}{[1 + (0,469/Pr)^{9/16}]^{4/9}} \right) (293,15 - T_t) = 0,95 \times \sigma(T_t^4 - 289,15^4)$$

Usando propriedades do ar à temperatura de 20°C, calculam-se:

$$T_t = 290,6 \text{ K} = 17,5^\circ\text{C}$$

$$h_{conv} = 3,1 \text{ W/m}^2\text{K}$$

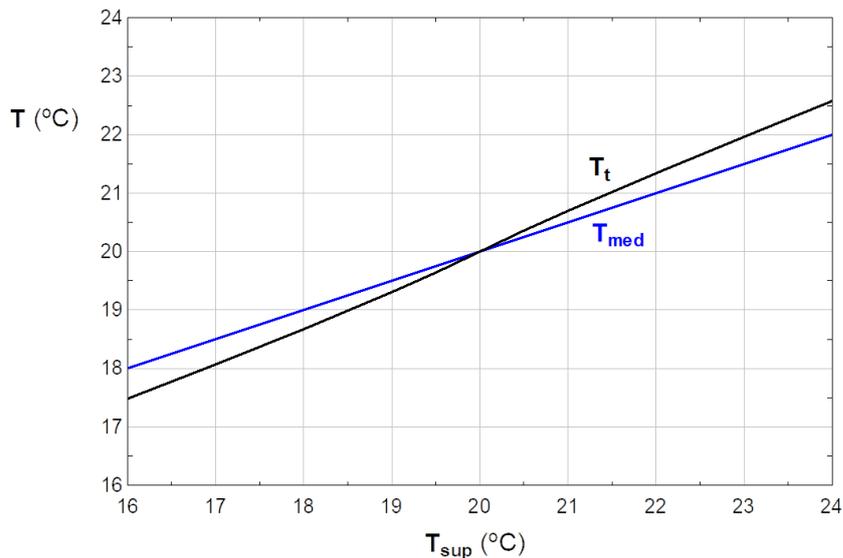
$$Gr_D Pr = 2,6 \times 10^5 \text{ (verifica a validade da correlação do } Nu).$$

A temperatura medida pelo termómetro é conhecida por temperatura resultante, e engloba o efeito da convecção e da radiação. É uma temperatura mais representativa do conforto térmico sentido por uma pessoa numa sala, que depende das temperaturas do ar e das superfícies. É menor que a temperatura do ar quando as superfícies estão mais frias que o ar, e maior quando elas estão mais quentes que o ar. Representa uma média pesada das 2 temperaturas, sendo os coeficientes os pesos, ou seja, recorrendo aos coeficientes de convecção e radiação:

$$T_t = \frac{h_{conv} \times T_{ar} + h_{rad} \times T_{sup}}{h_{conv} + h_{rad}}$$

Muitas vezes é estimada uma temperatura resultante calculada simplesmente como a média aritmética das 2 temperaturas, que neste caso seria de 18°C, e portanto 0,5°C mais elevada que a medida. A temperatura resultante é inferior porque o coeficiente de radiação (5,2 W/m²K) é superior ao de convecção (3,1 W/m²K).

Repetindo os cálculos para temperaturas das superfícies entre 16 e 24°C, obtiveram-se os valores do gráfico seguinte, que compara a temperatura resultante (do termómetro) com a temperatura média aritmética.

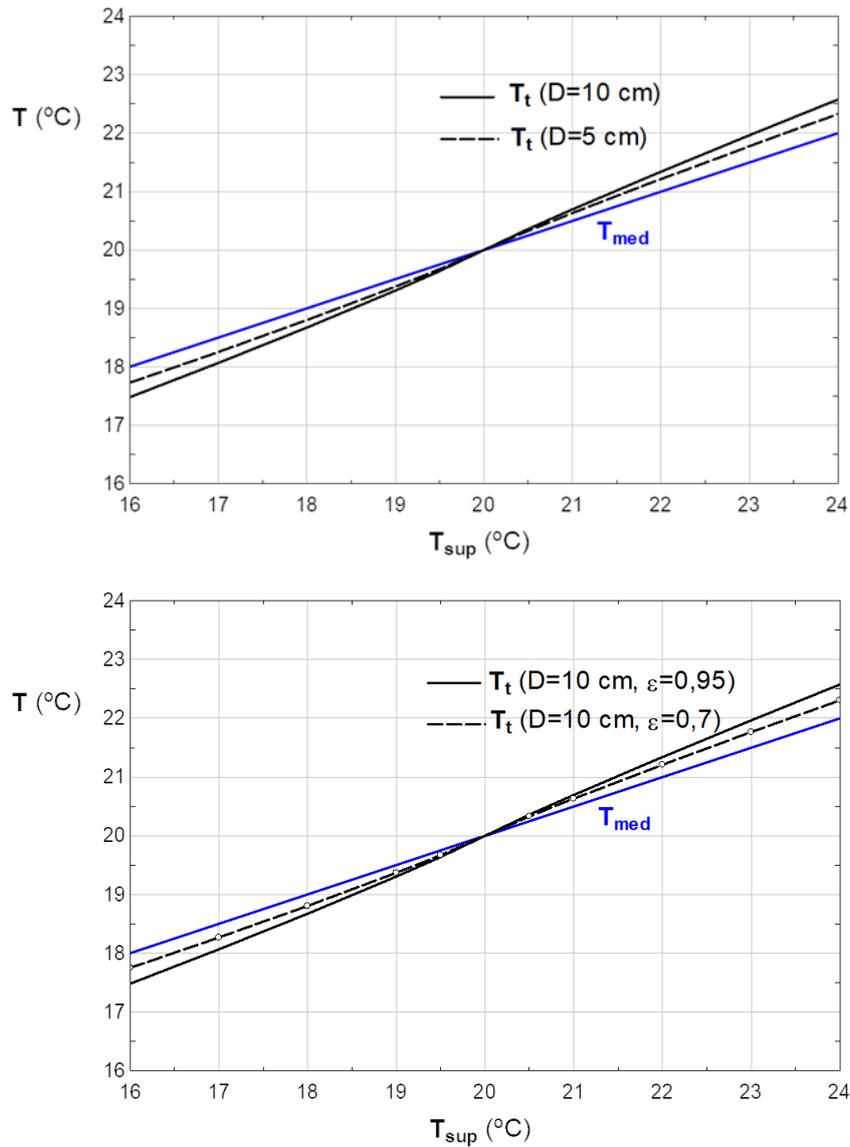


Como se pode observar, a diferença entre a temperatura medida (resultante) e a média aritmética é maior para maiores diferenças entre a temperatura do ar e das superfícies. O coeficiente de convecção aumenta com a maior diferença $|T_{sup} - T_{ar}|$, por aumentar também $|T_t - T_{ar}|$, e o coeficiente de radiação diminui (embora pouco), aumentando o coeficiente total (até 8,3 W/m²K para uma diferença de 4°C).

Para analisar o efeito do diâmetro do bolbo/esfera, refizeram-se os cálculos com um diâmetro de 5 cm. A diminuição do diâmetro tem como consequência um aumento do coeficiente de convecção, para as mesmas temperaturas. O gráfico seguinte mostra a aproximação da temperatura medida/resultante da média aritmética, quando comparada com a curva anterior. Estes termómetros têm normalmente diâmetros entre 5 e 15 cm, sendo que essa dimensão afeta, portanto, a medida da temperatura.

Quanto à emissividade do bolbo, foram repetidos os cálculos para uma emissividade de 0,7, mantendo o diâmetro de 10 cm. Os resultados do gráfico seguinte mostram que essa alteração também aproxima a temperatura medida da média aritmética, por reduzir o fluxo radiativo. No

entanto, os termômetros existentes têm emissividades típicas de 0,95, tentando reproduzir a emissividade da pele humana.



Neste exemplo a temperatura de todas as superfícies da sala foi considerada igual. Numa situação real diferentes superfícies têm temperaturas diferentes. Por isso este termómetro tem uma forma esférica, de modo a receber radiação de todas as direções do espaço (todas as superfícies). A temperatura das várias superfícies que o termómetro de bolbo negro contabiliza é a chamada temperatura média radiante.

P6.9



A lâmpada de incandescência vista no problema P5.7, funcionando com o filamento de tungstênio a 2500 K, tem um bolbo de vidro com 5 cm de diâmetro que pode ser considerado esférico. Para além das propriedades do filamento fornecidas em P5.7, sabe-se que tem um diâmetro de 0,2 mm e um comprimento de 35 cm.

Efetue o balanço energético da lâmpada e do bolbo de vidro, calculando a temperatura de equilíbrio deste.

A lâmpada está colocada numa sala em que o ar está calmo a 25°C, e todas as superfícies se encontram a 20°C. Sabe-se que o vidro tem as seguintes características:

- entre 0 e 3 μm: $\tau_v = 0,91$, $\rho_v = 0,04$, $\alpha_v = 0,05$
- acima de 3 μm: $\tau_v = 0$, $\rho_v = 0,2$, $\alpha_v = 0,8 = \varepsilon_v$

Resolução e discussão

As lâmpadas deste tipo têm o espaço no interior do bolbo de vidro evacuado, ou preenchido por um gás inerte. Desse modo evita-se a combustão do oxigénio no ar, que ocorreria se existisse ar no seu interior (devido à elevada temperatura do filamento), e também a oxidação do filamento. Nada sendo especificado, vamos considerar um bolbo evacuado. Assim, no interior do bolbo há que considerar apenas trocas de radiação térmica (não há convecção, ou é desprezável).

O problema P5.7 levou-nos ao cálculo da fração da radiação total emitida pelo filamento da lâmpada que está situada entre 0 e 3 μm, os comprimentos de onda que podem atravessar o vidro. A fração calculada foi

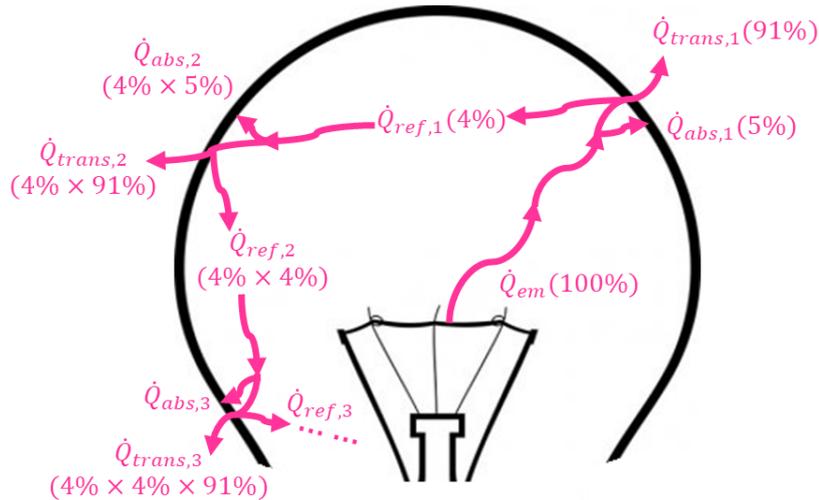
$$F_{0-3 \mu\text{m}}^{fil} = F_{0,35-3 \mu\text{m}}^{fil} = 0,879$$

A restante fração não consegue atravessar o vidro, que é opaco a esses comprimentos de onda.

Uma vez que a absorção e a reflexão de radiação não alteram o comprimento de onda desta, podemos dividir o balanço do bolbo de vidro, quanto à radiação recebida do filamento, em 2 partes: os comprimentos de onda até 3 μm (vidro semitransparente) e os comprimentos de onda a partir de 3 μm (vidro opaco).

Vamos então identificar as parcelas de radiação transmitidas e recebidas pelo vidro, do lado interior, para os comprimentos de onda que podem atravessar o vidro ($\lambda < 3 \mu\text{m}$). A figura seguinte tenta esquematizar o balanço das múltiplas reflexões, absorções e transmissões da radiação proveniente do filamento, para aqueles comprimentos de onda.

A principal parcela da radiação que atravessa o vidro ($\dot{Q}_{trans,1}$) é igual a 91% da radiação total emitida pelo filamento. Mas como uma pequena parte ($\rho_v = 4\%$) é refletida para o interior ($\dot{Q}_{ref,1}$), uma fração dela atravessará o vidro ($\dot{Q}_{trans,2}$), igual a $4\% \times 91\% = 3,64\%$ da radiação emitida pelo filamento, que se soma à anterior. E podemos também adicionar uma terceira parcela ($\dot{Q}_{trans,3}$), igual a 0,15%. Após mais reflexões deixa de ter significado o valor acrescentado.



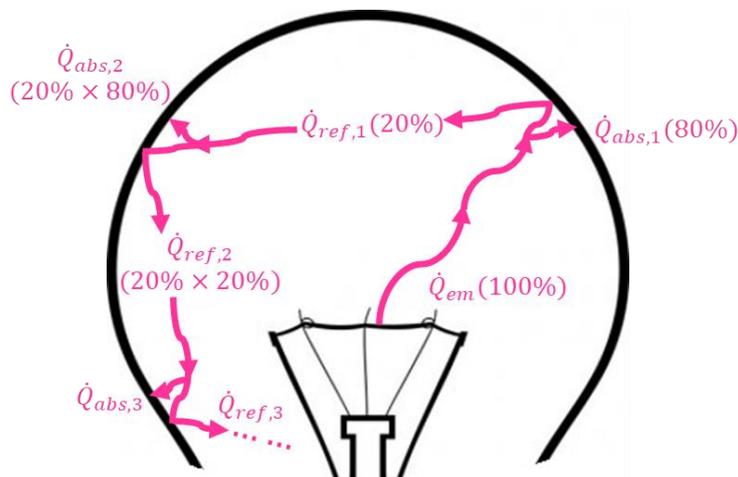
Com as 3 reflexões consideradas, teremos que o total de radiação emitida pelo filamento que é transmitida pelo vidro é:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{trans}^{0-3} &= \dot{Q}_{em,fil}^{0-3} (0,91 + 0,0364 + 0,0015) = 0,948 F_{0-3 \mu m}^{fil} \varepsilon_{fil} \sigma T_{fil}^4 A_{fil} = \\ &= 0,948 \times 0,879 \times 0,2066 \times 5,67 \times 10^{-8} \times 2500^4 \times \pi \times 0,0002 \times 0,35 = \\ &= 83,85 \text{ W} \end{aligned}$$

Esta radiação atravessa o vidro e não contribui para o seu balanço energético. Ao contrário, a restante radiação nestes comprimentos de onda é totalmente recebida pelo vidro (desprezando a que é reenviada ao filamento), após as múltiplas reflexões e absorções. Desprezamos a radiação que o filamento recebe, da parte que o vidro reflete, devido à pequena área do filamento. Então, o vidro recebe, pelo interior:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{inc,int}^{0-3} &= (1 - 0,948) F_{0-3 \mu m}^{fil} \varepsilon_{fil} \sigma T_{fil}^4 A_{fil} = \\ &= 0,052 \times 0,879 \times 0,2066 \times 5,67 \times 10^{-8} \times 2500^4 \times \pi \times 0,0002 \times 0,35 = \\ &= 4,60 \text{ W} \end{aligned}$$

Para os comprimentos de onda nos quais o vidro é opaco ($\lambda > 3 \mu m$), as trocas radiativas no interior do bulbo relativas à radiação emitida pelo filamento estão esquematizadas na figura seguinte.



Para estes comprimentos de onda toda a radiação fica “capturada” no interior do bulbo, pelo que após múltiplas reflexões e absorções acaba toda por ser recebida pela superfície interior do vidro (desprezando a que vai ser recebida pelo filamento). Deste modo, a radiação recebida é

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{inc,int}^{3-\infty} &= (1 - F_{0-3\ \mu m}^{fil})\varepsilon_{fil}\sigma T_{fil}^4 A_{fil} = \\ &= (1 - 0,879) \times 0,2066 \times 5,67 \times 10^{-8} \times 2500^4 \times \pi \times 0,0002 \times 0,35 = \\ &= 12,18\ \text{W}\end{aligned}$$

Então, o total de radiação recebida pelo bulbo de vidro na face interior é

$$\dot{Q}_{inc,int} = \dot{Q}_{inc,int}^{0-3} + \dot{Q}_{inc,int}^{3-\infty} = 4,60 + 12,18 = 16,78\ \text{W}$$

Por seu lado, a superfície interior do bulbo de vidro vai também emitir radiação, toda situada nos comprimentos de onda $\lambda > 3\ \mu\text{m}$, para os quais o vidro é opaco, devido à relativamente baixa temperatura a que se encontra. O vidro também reflete radiação ($\lambda > 3\ \mu\text{m}$), mas a parcela mais importante (vinda do filamento) foi já contabilizada anteriormente. Parte da radiação emitida irá incidir no próprio bulbo, devido à sua área ser muito superior à do filamento (o fator de visão do bulbo para si próprio é muito elevado). A radiação emitida pelo vidro que este perde para o interior é:

$$\dot{Q}_{perda,int} = \varepsilon_{v,\lambda>3}\sigma T_{vid}^4 A_v F_{vid-fil} = \varepsilon_{v,\lambda>3}\sigma T_{vid}^4 A_{fil}$$

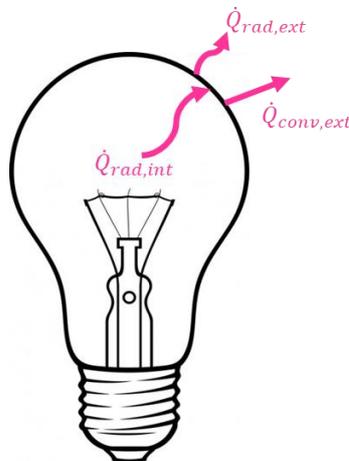
uma vez que o fator de visão do filamento para o bulbo é igual a 1.

O balanço da superfície interior do bulbo será então:

$$\dot{Q}_{rad,int} = \dot{Q}_{inc,int} - \dot{Q}_{perda,int} = 16,78 - 0,8 \times \sigma T_{vid}^4 \times 2,2 \times 10^{-4}$$

Note-se que a parcela da perda é muito menos significativa, apesar do seu valor exato não ser ainda conhecido, e poderia desprezar-se.

Podemos agora efetuar o balanço do bulbo, considerando as trocas para o exterior, que se dão por convecção natural para o ar da sala e por radiação térmica trocada com as superfícies da sala, de área muito superior à da lâmpada, radiação para a qual o vidro é opaco. Note-se também que o vidro é cinzento e difuso para $\lambda > 3\ \mu\text{m}$. O balanço está representado na figura seguinte, e despreza a condução no vidro, de espessura muito reduzida.



Podemos escrever-se

$$\begin{aligned}\dot{Q}_{rad,int} &= \dot{Q}_{rad,ext} + \dot{Q}_{conv,ext} = \\ &= \varepsilon_{vid,\lambda>3} A_{vid} \sigma (T_{vid}^4 - T_{sup}^4) + h_{conv,ext} A_{vid} (T_{vid} - T_{ar,ext})\end{aligned}$$

ou seja, considerando o bolbo uma esfera perfeita:

$$\begin{aligned}16,78 - 0,8 \times 5,67 \times 10^{-8} \times T_{vid}^4 \times 2,2 \times 10^{-4} = \\ = 4\pi \times \left(\frac{0,05}{2}\right)^2 \left(0,8 \times 5,67 \times 10^{-8} \times (T_{vid}^4 - 293,15^4) + h_{conv,ext} (T_{vid} - 298,15)\right)\end{aligned}$$

O coeficiente de convecção natural pode calcular-se pela correlação da Tabela 2.4, em função da temperatura (Gr depende da temperatura):

$$Nu = \frac{h_{conv,ext} D}{k_{ar}} = 2 + \frac{0,589 (Gr.Pr)^{1/4}}{[1+(0,469/Pr)^{9/16}]^{4/9}}, \text{ válida para } GrPr \leq 10^{11} \text{ e } Pr \geq 0,7$$

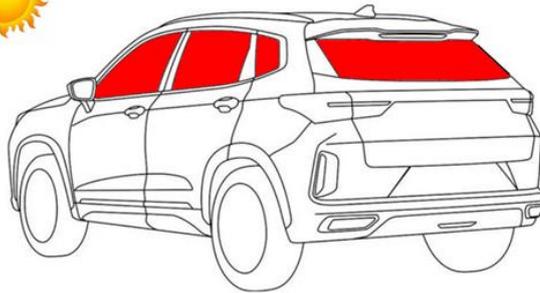
Resolvendo as 2 equações, obtêm-se:

$$T_{vid} = 407 \text{ K} = 133,8^\circ\text{C}$$

$$h_{conv,ext} = 10,9 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$GrPr = 5,0 \times 10^5 \text{ (verifica a validade da correlação do } Nu\text{)}.$$

P6.10



Um automóvel fechado exposto ao sol pode atingir temperaturas muito elevadas no seu interior, fundamentalmente devido à sua superfície envidraçada, o que se agrava com o habitáculo fechado.

Considere que os seus vidros têm um coeficiente de transmissão (hemisférico) que varia com o comprimento de onda da radiação solar incidente (λ), sendo igual a 0,85 para λ entre 0 e 3 μm e 0 para λ acima de 3 μm .

No sentido de estimar a temperatura máxima atingida no habitáculo do veículo, assuma as seguintes hipóteses simplificativas:

- o ar e as superfícies interiores do habitáculo (opacas) encontram-se à mesma temperatura;
- o habitáculo só perde calor pela área envidraçada, sendo as restantes superfícies adiabáticas para o exterior;
- a espessura dos envidraçados é desprezável;
- os envidraçados têm uma irradiação solar total uniforme de 500 W/m^2 , encontrando-se todos à mesma temperatura;
- os envidraçados têm um coeficiente de absorção para $\lambda < 3 \mu\text{m}$ de 0,05, comportando-se como superfícies cinzentas e difusas para $\lambda > 3 \mu\text{m}$, com $\varepsilon = 0,8$; as superfícies interiores têm um coeficiente total de absorção de 0,7 e comportam-se como superfícies cinzentas e difusas.

Nessas condições, calcule a temperatura dos envidraçados e a temperatura no interior do habitáculo em regime permanente, sabendo que a área total envidraçada é de 3 m^2 , a área útil das superfícies interiores opacas é de $4,5 \text{ m}^2$, e o fator de visão entre os envidraçados e as restantes superfícies interiores é igual a 0,65. Os coeficientes de convecção interior e exterior são de 5 e $20 \text{ W/m}^2\text{K}$ (respetivamente), e a temperatura exterior é de 25°C (ar e superfícies).

Resolução e discussão

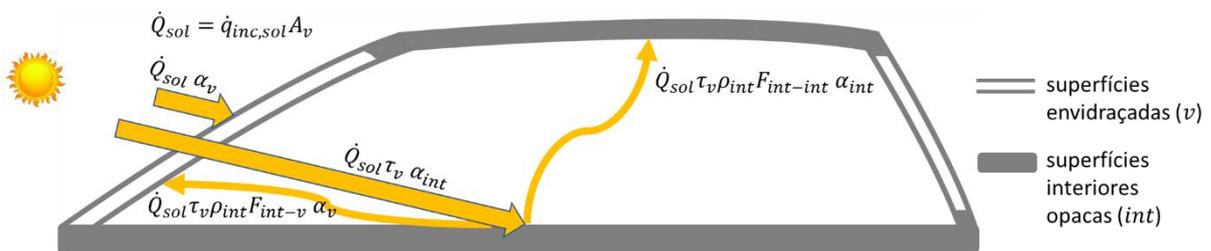
Vamos efetuar o balanço, em regime permanente, do interior do habitáculo (ar e superfícies opacas) e das superfícies envidraçadas (semitransparentes).

Em relação à radiação solar, que é a fonte de calor, vamos começar por analisar os comprimentos de onda respetivos. Quase toda a radiação solar se situa nos comprimentos de onda para os quais o vidro é semitransparente, o que pode ser verificado calculando a fração de energia emitida pelo Sol (como corpo negro a 5800 K) até 3 μm . Da Tabela 5.1:

$$F_{0-3}(3 \times 5800 \mu\text{mK}) = 0,98$$

Este é um valor aproximado, já que a radiação solar que chega ao nível do solo tem uma distribuição espectral um pouco alterada (em relação ao corpo negro a 5800 K). Como para além disso a diferença é muito pequena, vamos considerar que toda a radiação solar incidente no vidro se situa até 3 μm . Caso contrário, considerar-se-iam 98% dos 500 W/m^2 . Os vidros absorverão 5% da radiação solar incidente na superfície exterior, tendo em conta o seu coeficiente de absorção ($\alpha_v = 0,05$, para $\lambda < 3 \mu\text{m}$).

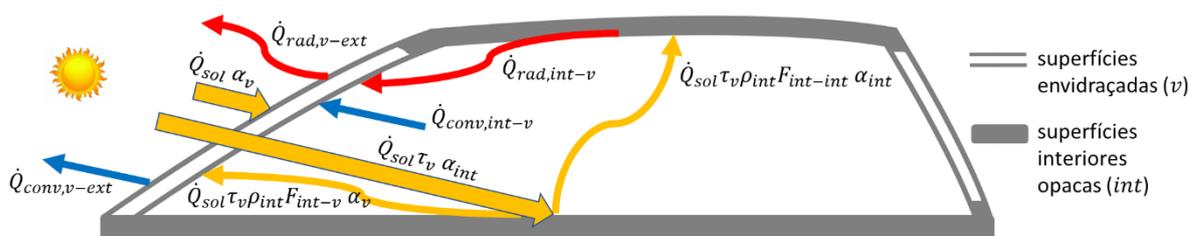
A radiação solar que os envidraçados refletem para o exterior representa uma perda, e é como se nunca tivesse lá chegado. A radiação solar que atravessa os envidraçados (τ_v) é parcialmente absorvida pelas superfícies interiores opacas (α_{int}). A que não é absorvida é refletida (sem alteração do comprimento de onda), com um coeficiente de reflexão ρ_{int} . Admite-se que a reflexão é difusa, ou seja, a radiação é igualmente refletida em todas as direções. Esta radiação refletida vai ter às superfícies envidraçadas e às próprias superfícies interiores, proporcionalmente aos fatores de visão respetivos: F_{int-v} e $F_{int-int}$. A radiação proveniente destas parcelas refletidas irá por sua vez ser parcialmente absorvida e parcialmente refletida; esta 2ª reflexão, e outras re-reflexões, são, no entanto, grandezas de “2ª ordem”, já bastante pequenas pela multiplicação sucessiva pelos coeficientes de reflexão, pelo que serão desprezadas. A figura seguinte representa as potências caloríficas ganhas pelas superfícies, associadas à radiação solar (comprimentos de onda até 3 μm).



Quanto à radiação de maiores comprimentos de onda (acima dos 3 μm) trocada pelas superfícies (interiores opacas, envidraçados e superfícies exteriores), toda ela é proveniente de corpos a baixa temperatura. Mesmo que as superfícies interiores opacas atinjam 100°C (373,15 K) a fração de energia emitida até 3 μm é virtualmente nula: mesmo para um corpo negro $F_{0-3}(3 \times 373,15 \mu\text{mK}) < 0,001$. Há então a contabilizar as trocas no interior entre 2 superfícies opacas, cinzentas e difusas (interiores opacos, e envidraçados nesses λ), e as trocas no exterior entre 2 superfícies opacas, cinzentas e difusas (exterior e envidraçados nesses λ).

Quanto aos restantes modos de transferência de calor, não iremos considerar a condução nas superfícies interiores opacas (por se encontrarem isoladas) nem nos envidraçados (pela pequena espessura). Há que considerar a convecção entre os vidros e o ar interior (natural) e entre os vidros e o ar exterior, sendo os coeficientes já conhecidos. Saliente-se que se considera que o ar interior atingiu o equilíbrio térmico com as superfícies interiores opacas, pelo que não se torna necessário contabilizar a sua temperatura (é igual à das superfícies).

A figura seguinte resume todas as potências referidas, que permitem fazer os balanços de todas as superfícies.



Então, podemos escrever a seguinte equação de balanço em regime permanente do conjunto ar/superfícies opacas interiores:

$$\dot{Q}_{sol} \tau_v \alpha_{int} + \dot{Q}_{sol} \tau_v \rho_{int} F_{int-int} \alpha_{int} = \dot{Q}_{rad, int-v} + \dot{Q}_{conv, int-v}$$

e a equação de balanço das superfícies envidraçadas:

$$\dot{Q}_{sol} \alpha_v + \dot{Q}_{sol} \tau_v \rho_{int} F_{int-v} \alpha_v + \dot{Q}_{rad, int-v} + \dot{Q}_{conv, int-v} = \dot{Q}_{rad, v-ext} + \dot{Q}_{conv, v-ext}$$

que, na forma de um sistema de equações, e expressando as temperaturas em causa, se pode escrever como

$$\begin{cases} \dot{Q}_{sol} \tau_v \alpha_{int} + \dot{Q}_{sol} \tau_v \rho_{int} F_{int-int} \alpha_{int} = \frac{\sigma(T_{int}^4 - T_v^4)}{\frac{(1-\varepsilon_{int})}{A_{int}\varepsilon_{int}} + \frac{1}{A_v F_{v-int}} + \frac{(1-\varepsilon_v)}{A_v \varepsilon_v}} + h_{int} A_v (T_{int} - T_v) \\ \dot{Q}_{sol} \alpha_v + \dot{Q}_{sol} \tau_v \rho_{int} F_{int-v} \alpha_v + \frac{\sigma(T_{int}^4 - T_v^4)}{\frac{(1-\varepsilon_{int})}{A_{int}\varepsilon_{int}} + \frac{1}{A_v F_{v-int}} + \frac{(1-\varepsilon_v)}{A_v \varepsilon_v}} + h_{int} A_v (T_{int} - T_v) = \\ = A_v \varepsilon_v \sigma(T_v^4 - T_{ext}^4) + h_{ext} A_v (T_v - T_{ext}) \end{cases}$$

Para resolver o sistema precisamos de definir os fatores de visão:

$$F_{v-int} = 0,65 \text{ (dado no enunciado do problema)}$$

$$F_{int-v} = F_{v-int} A_v / A_{int} = 0,65 \times 3 / 4,5 = 0,4333$$

$$F_{int-int} = 1 - F_{int-v} = 0,5667$$

Substituindo os valores conhecidos teremos:

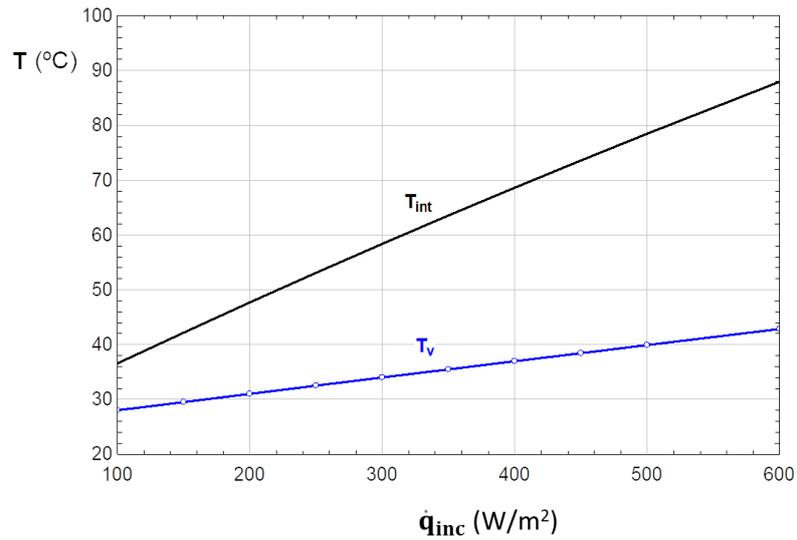
$$\begin{cases} 500 \times 3 \times 0,85 \times 0,7 + 500 \times 3 \times 0,3 \times 0,5667 \times 0,7 = \\ = \frac{5,67 \times 10^{-8} \times (T_{int}^4 - T_v^4)}{\frac{(1-0,7)}{4,5 \times 0,7} + \frac{1}{3 \times 0,65} + \frac{(1-0,8)}{3 \times 0,8}} + 5 \times 3 \times (T_{int} - T_v) \\ 500 \times 3 \times 0,05 + 500 \times 3 \times 0,85 \times 0,3 \times 0,4333 \times 0,05 + \frac{5,67 \times 10^{-8} \times (T_{int}^4 - T_v^4)}{\frac{(1-0,7)}{4,5 \times 0,7} + \frac{1}{3 \times 0,65} + \frac{(1-0,8)}{3 \times 0,8}} + \\ + 5 \times 3 \times (T_{int} - T_v) = 3 \times 0,8 \times 5,67 \times 10^{-8} \times (T_v^4 - 298,15^4) + 20 \times 3 \times (T_v - T_{ext}) \\ \begin{cases} 892,5 + 178,5 = 8,2008 \times 10^{-8} \times (T_{int}^4 - T_v^4) + 15 \times (T_{int} - T_v) \\ 75 + 8,287 + 8,2008 \times 10^{-8} \times (T_{int}^4 - T_v^4) + 15 \times (T_{int} - T_v) = \\ = 1,3608 \times 10^{-7} \times (T_v^4 - 298,15^4) + 60 \times (T_v - 298,15) \end{cases} \end{cases}$$

o que nos conduz aos resultados

$$\begin{cases} T_{int} = 351,6 \text{ K} = 78,5^\circ\text{C} \\ T_v = 313,0 \text{ K} = 39,9^\circ\text{C} \end{cases}$$

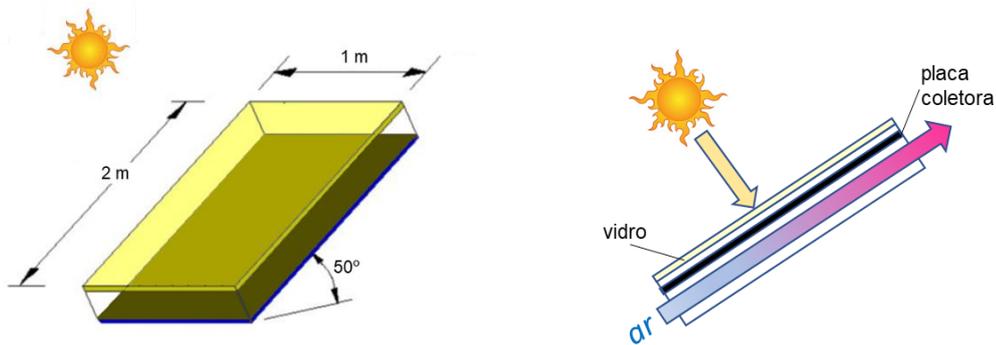
A temperatura interior será na realidade bastante elevada, mas menor do que a calculada neste exemplo (será da ordem dos 60-70°C num dia de sol). Isso devido às perdas de calor para o exterior que ocorrem na envolvente opaca (superfícies opacas), que aqui foram esquecidas, e também à menor radiação solar incidente. Na realidade os envidraçados não terão uma irradiação uniforme, sendo que alguns, pela sua posição relativamente aos raios solares, receberão bastante menos radiação solar que outros: a radiação recebida é tanto maior quanto mais perto da perpendicular às superfícies estiverem os raios solares, sendo que o máximo na perpendicular num dia de Verão andarà pelos 1000 W/m²; o valor médio em todas os envidraçados será mais baixo, da ordem dos 300-400 W/m².

Para analisar o efeito da irradiação solar nos envidraçados, foram repetidos os cálculos, variando $\dot{q}_{inc,sol}$ entre 100 e 600 W/m². O gráfico seguinte apresenta os resultados.



Note-se a variação quase linear de ambas as temperaturas (interior e dos envidraçados) com a variação da irradiação solar até cerca de $400 W/m^2$ (a partir desse valor há um menor aumento, sobretudo para a temperatura interior). Claro que um aumento da temperatura exterior (aqui não quantificado) também contribui para o aumento da temperatura interior, por reduzir as perdas de calor do habitáculo.

P6.11



O coletor solar plano da figura aquece uma corrente de ar de $0,05 \text{ m}^3/\text{s}$ que circula num canal retangular de 10 mm de altura e 1 m de largura entre a placa e o fundo do coletor. O fundo e os topos laterais são muito bem isolados termicamente. A distância entre a placa e o vidro é de 12 mm.

A cobertura de vidro tem um coeficiente de transmissão (hemisférico) que varia com o comprimento de onda da radiação incidente (λ), sendo igual a 0,85 para λ entre 0 e $3 \text{ }\mu\text{m}$ e 0 para λ acima de $3 \text{ }\mu\text{m}$, e um coeficiente de absorção para $\lambda < 3 \text{ }\mu\text{m}$ de 0,05, comportando-se como uma superfície cinzenta e difusa para $\lambda > 3 \text{ }\mu\text{m}$, com $\varepsilon = 0,8$. Quanto à placa coletora, com um revestimento seletivo de dióxido de titânio, tem as propriedades do problema P5.5, com $\varepsilon_{0-2,5 \text{ }\mu\text{m}} = 0,95$ e $\varepsilon_{\lambda > 2,5 \text{ }\mu\text{m}} = 0,05$.

Efetue o balanço térmico do coletor em regime permanente, calculando as temperaturas médias da placa coletora e da cobertura de vidro, e a potência recebida pelo ar, quando a sua temperatura de entrada é igual à temperatura exterior (ar ambiente e superfícies) de 25°C , e a radiação solar incidente na cobertura é de $1000 \text{ W}/\text{m}^2$. O coeficiente de convecção para o ar exterior é igual a $20 \text{ W}/\text{m}^2\text{K}$.

Resolução e discussão

Vamos efetuar o balanço do coletor em regime permanente, começando pela radiação solar ganha. Quase toda a radiação solar se situa nos comprimentos de onda para os quais o vidro é semitransparente, o que pode ser verificado calculando a fração de energia emitida pelo Sol (como corpo negro a 5800 K) até $3 \text{ }\mu\text{m}$. Da Tabela 5.1:

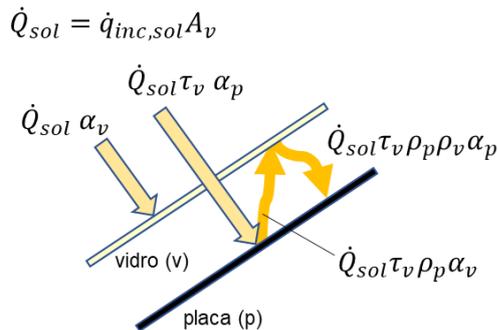
$$F_{0-3}(3 \times 5800 \text{ }\mu\text{mK}) = 0,98$$

Este é um valor aproximado, já que a radiação solar que chega ao nível do solo tem uma distribuição espectral um pouco alterada (em relação ao corpo negro a 5800 K). Como para além disso a diferença é muito pequena, vamos considerar que toda a radiação solar incidente no vidro se situa até $3 \text{ }\mu\text{m}$. Caso contrário, considerar-se-iam 98% dos $500 \text{ W}/\text{m}^2$. O vidro absorverá 5% da radiação solar incidente na superfície exterior, tendo em conta o seu coeficiente de absorção ($\alpha_v = 0,05$ para $\lambda < 3 \text{ }\mu\text{m}$).

Quanto à placa seletiva, vamos utilizar os valores já calculados no problema P5.5: $\alpha_p = 0,92$ (para $\lambda < 3 \text{ }\mu\text{m}$, caso da radiação solar) e $\varepsilon_p = 0,05$ (esta para $\lambda > 3 \text{ }\mu\text{m}$, caso da radiação que a placa emite).

A radiação solar que a superfície exterior do vidro reflete para o exterior representa uma perda, e é como se nunca tivesse lá chegado. A radiação solar que atravessa o vidro (τ_v) é parcialmente

absorvida pela placa (α_p). A que não é absorvida é refletida (sem alteração do comprimento de onda), com um coeficiente de reflexão ρ_p . Admite-se que a reflexão é difusa, ou seja, a radiação é igualmente refletida em todas as direções. Esta radiação refletida vai ter à superfície interior da cobertura de vidro e uma pequena parte desta é absorvida ($\alpha_v = 0,05$ para $\lambda < 3 \mu\text{m}$). Por sua vez o vidro reflete novamente uma parte desta radiação, que chega à placa, sendo parcialmente absorvida (α_p). A figura seguinte ilustra a radiação solar ganha pela cobertura de vidro e pela placa pela incidência direta, representando-se também a potência refletida pela placa e absorvida pelo vidro ($\dot{Q}_{sol} \tau_v \rho_p \alpha_v$) e a potência re-refletida pelo vidro (vinda da refletida da placa) e absorvida pela placa ($\dot{Q}_{sol} \tau_v \rho_p \rho_v \alpha_p$).



No entanto estas reflexões-absorções têm um peso muito pequeno e são vulgarmente desprezadas. Comparando os valores para este caso, temos para a radiação absorvida pelo vidro:

$$\dot{Q}_{sol} \alpha_v = \dot{q}_{inc,sol} A_v \alpha_v = 100 \text{ W comparada com } \dot{Q}_{sol} \tau_v \rho_p \alpha_v = 6,8 \text{ W (6,8\%)}$$

e para a radiação absorvida pela placa:

$$\dot{Q}_{sol} \tau_v \alpha_p = 1564 \text{ W comparada com } \dot{Q}_{sol} \tau_v \rho_p \rho_v \alpha_p = 12,5 \text{ W (0,8\%)}$$

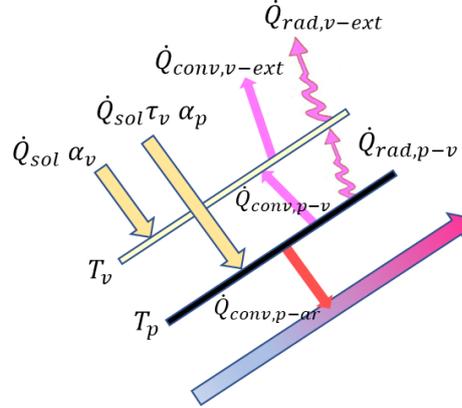
Como se vê, é perfeitamente razoável desprezar as reflexões-absorções. Outras re-reflexões podem também desprezar-se. Nestes cálculos desprezou-se o efeito dos topos laterais que fecham o coletor, porque a distância entre a placa e o vidro é muito pequena face ao seu comprimento e largura. É mesmo vulgar desprezar também a radiação absorvida pela cobertura de vidro, que representa apenas 5% da radiação incidente. No entanto, iremos considerá-la no balanço que se segue, desprezando apenas as reflexões-absorções.

Quanto à radiação de maiores comprimentos de onda (acima dos $3 \mu\text{m}$) trocada pela placa e pela superfície interior do vidro, e a trocada pela superfície exterior do vidro e as superfícies exteriores ao coletor, toda ela é proveniente de corpos a baixa temperatura. Mesmo que a superfície da placa atinja 100°C ($373,15 \text{ K}$), a fração de energia emitida até $3 \mu\text{m}$ é virtualmente nula: mesmo para um corpo negro $F_{0-3}(3 \times 373,15 \mu\text{mK}) < 0,001$. Há então a contabilizar as trocas no interior do coletor (placa-vidro) entre 2 superfícies opacas, cinzentas e difusas ($\lambda > 3 \mu\text{m}$), e as trocas no exterior entre 2 superfícies opacas, cinzentas e difusas (cobertura de vidro e superfícies exteriores, para $\lambda > 3 \mu\text{m}$).

Quanto aos restantes modos de transferência de calor, não iremos considerar a condução na placa (de muito pequena espessura), nem no vidro (também pela pequena espessura). Também se despreza a condução de calor longitudinal na placa (na direção do escoamento), considerando-se esta a uma temperatura média em toda a extensão. Há que considerar a convecção natural na cavidade formada no espaço entre o vidro e a placa, e a convecção (forçada) entre a cobertura de vidro e o ar exterior, sendo este coeficiente já conhecido. Existe ainda a transferência de calor por convecção forçada entre a placa e a corrente de ar. Quanto à

radiação trocada entre a superfície inferior da placa e o fundo do coletor (através do canal de ar), é também desprezada – esta hipótese será analisada em detalhe posteriormente.

A figura seguinte resume todas as potências referidas, que permitem fazer os balanços de todas as superfícies.



Podemos escrever a seguinte equação de balanço da cobertura de vidro, em regime permanente (à temperatura média T_v):

$$\dot{Q}_{sol}\alpha_v + \dot{Q}_{rad,p-v} + \dot{Q}_{conv,p-v} = \dot{Q}_{rad,v-ext} + \dot{Q}_{conv,v-ext}$$

e a equação de balanço da placa (à temperatura média T_p):

$$\dot{Q}_{sol}\tau_v\alpha_p = \dot{Q}_{rad,p-v} + \dot{Q}_{conv,p-v} + \dot{Q}_{conv,p-ar}$$

Quanto ao escoamento de ar, a sua temperatura aumenta entre a entrada (T_{ext}) e a saída (T_{sai}), devido à potência calorífica recebida da placa, o que pode traduzir-se pela adaptação da equação (2.26):

$$\frac{(T_{sai}-T_p)}{(T_{ext}-T_p)} = \exp\left(-\frac{\bar{h}_{ar}A_p}{\dot{M}c_{p,ar}}\right)$$

Expressando as temperaturas em causa, podemos escrever o sistema de equações:

$$\begin{cases} \dot{Q}_{sol}\alpha_v + \frac{\sigma(T_p^4 - T_v^4)A_p}{\frac{1}{\varepsilon_p} + \frac{1}{\varepsilon_v} - 1} + h_{p-v}A_p(T_p - T_v) = A_v\varepsilon_v\sigma(T_v^4 - T_{ext}^4) + h_{ext}A_v(T_v - T_{ext}) \\ \dot{Q}_{sol}\tau_v\alpha_p = \frac{\sigma(T_p^4 - T_v^4)A_p}{\frac{1}{\varepsilon_p} + \frac{1}{\varepsilon_v} - 1} + h_{p-v}A_p(T_p - T_v) + \dot{M}c_{p,ar}(T_{sai} - T_{ext}) \\ \frac{(T_{sai}-T_p)}{(T_{ext}-T_p)} = \exp\left(-\frac{\bar{h}_{ar}A_p}{\dot{M}c_{p,ar}}\right) \end{cases}$$

Este sistema de 3 equações permite calcular as 3 temperaturas (T_p , T_v e T_{sai}), desde que calculados os coeficientes de convecção (\bar{h}_{ar} e h_{p-v}).

Para o escoamento de ar, com as propriedades tomadas a 40°C (como estimativa da média placa-fluido), vem:

$$v_m = \frac{\dot{V}_{ar}}{lH} = \frac{0,05}{1 \times 0,010} = 5 \text{ m/s}$$

$$Re_{D_h} = \frac{\rho_{ar}v_mD_h}{\mu_{ar}} = \frac{1,112 \times 5 \times 0,0198}{1,918 \times 10^{-5}} = 5740$$

o que significa que o escoamento se dá em regime turbulento, vindo pela equação de Dittus-Boelter:

$$Nu_{D_h, desenv} = 0,023 Re_D^{0,8} Pr^{0,4} = 20,6$$

No regime turbulento o comprimento de entrada (até à zona de camada limite térmica desenvolvida) é de cerca de 10 diâmetros – equação (2.19) – o que neste caso significa 0,2 m de comprimento (10% do comprimento de escoamento). Contabilizando o seu efeito com a equação (2.23), temos:

$$\overline{Nu}_{D_h} = Nu_{D_h, desenv} \left(1 + \frac{1}{(L/D_h)^{2/3}}\right) = 20,6 \times \left(1 + \frac{1}{(2/0,02)^{2/3}}\right) = 21,6$$

Então o coeficiente de convecção médio será:

$$\bar{h}_{ar} = \frac{\overline{Nu}_D k}{D_h} = \frac{21,6 \times 0,02662}{0,02} = 28,7 \text{ W/m}^2\text{C}$$

Quanto ao coeficiente de convecção entre a placa e o vidro, consideraremos a correlação (2.30), em que a dimensão característica é a distância entre a placa e o vidro (L_{p-v}):

$$h_{p-v} = \frac{k_{ar}}{L_{p-v}} \left[1 + 1,44 \left[1 - \frac{1708}{Ra_L \cos 50^\circ}\right]^+ \left(1 - \frac{1708 (\sin 90^\circ)^{1,6}}{Ra_L \cos 50^\circ}\right) + \left[\frac{(Ra_L \cos 50^\circ)^{1/3}}{18} - 1\right]^+\right]$$

denotando o sinal + que se o valor calculado for negativo deve ser tomado como zero; há que escrever Ra_L em função da diferença de temperatura entre a placa e o vidro, e das propriedades do ar (tomadas a 45°C). Tem-se:

$$Ra_L = 111,8 (T_p - T_v)$$

Então, o sistema das 3 equações anteriores a resolver, mais a de h_{p-v} , é

$$\begin{cases} 2000 \times 0,05 + \frac{5,67 \times 10^{-8} \times (T_p^4 - T_v^4) \times 2}{\frac{1}{0,05} + \frac{1}{0,8} - 1} + h_{p-v} \times 2 \times (T_p - T_v) = \\ \quad = 2 \times 0,8 \times 5,67 \times 10^{-8} \times (T_v^4 - 298,15^4) + 20 \times 2 \times (T_v - 298,15) \\ 2000 \times 0,85 \times 0,92 = \frac{5,67 \times 10^{-8} \times (T_p^4 - T_v^4) \times 2}{\frac{1}{0,05} + \frac{1}{0,8} - 1} + h_{p-v} \times 2 \times (T_p - T_v) + \\ \quad + 0,0556 \times 1005 \times (T_{sai} - 298,15) \\ \frac{(T_{sai} - T_p)}{(298,15 - T_p)} = \exp\left(-\frac{28,7 \times 2}{0,0556 \times 1005}\right) \end{cases}$$

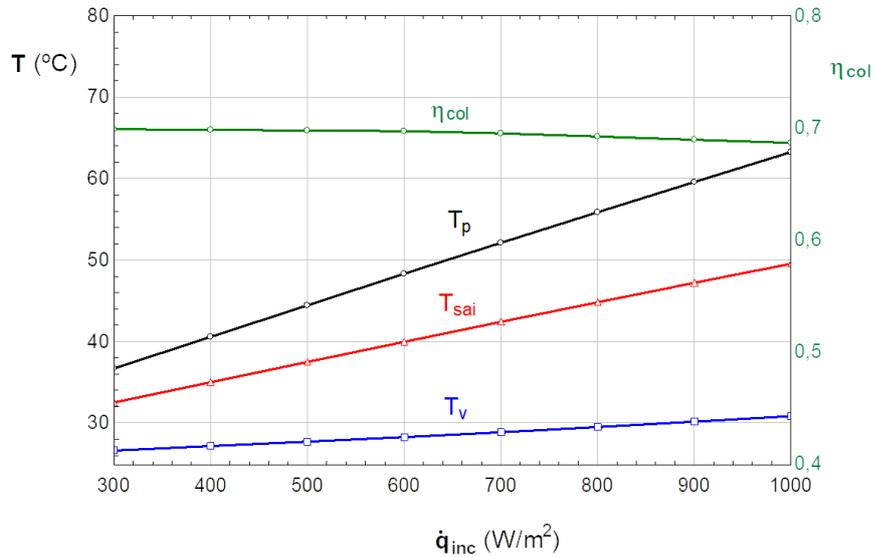
que conduz à solução:

$$\begin{cases} T_p = 63,3^\circ\text{C} \\ T_v = 30,8^\circ\text{C} \\ T_{sai} = 49,6^\circ\text{C} \\ h_{p-v} = 2,6 \text{ W/m}^2\text{K} \end{cases}$$

Podemos quantificar o comportamento térmico do coletor através da razão entre a potência calorífica recebida pelo ar (efeito útil) e a potência disponível (da radiação solar). Esse quociente é designado por rendimento térmico do coletor. Neste caso ele é igual a

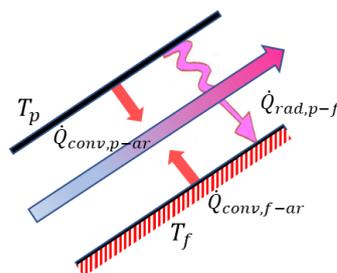
$$\eta_{col} = \frac{\dot{Q}_{conv, p-ar}}{\dot{Q}_{sol}} = \frac{1373}{2000} = 0,69$$

De seguida analisa-se o efeito da variação da irradiação solar no coletor. Foram repetidos os cálculos, variando $\dot{q}_{inc,sol}$ entre 300 e 1000 W/m². O gráfico seguinte apresenta os resultados.



Como era de esperar, as temperaturas (placa, vidro e saída do ar) aumentam com o aumento da radiação solar recebida. As variações são aproximadamente lineares. Quanto ao rendimento térmico do coletor, mantém-se bastante estável, com um ligeiro decréscimo ao aumentar a irradiação. Note-se que se a temperatura do ar à entrada fosse superior à temperatura do ar ambiente exterior, passaria a haver um aumento do rendimento térmico com o aumento da irradiação.

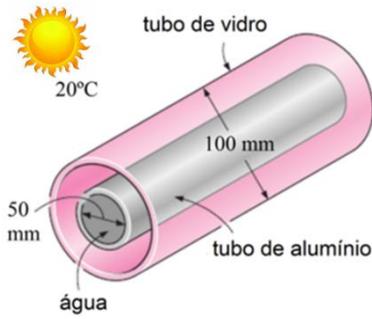
Vamos agora analisar a hipótese considerada relativamente à radiação trocada através do canal de passagem do ar, entre a face inferior da placa e a face interior do fundo do coletor (fundo que se considera perfeitamente isolado). A figura seguinte ilustra as trocas de calor entre as superfícies (balanço radiativo) e as trocas convectivas com o ar.



Existe efetivamente uma troca radiativa, que constitui uma perda para a placa (tende a diminuir a temperatura da placa, T_p), para além da convectiva. No entanto essa potência é “recuperada” pelo ar, já que estando o fundo isolado existe igualdade entre $\dot{Q}_{rad,p-f}$ e $\dot{Q}_{conv,f-ar}$. A temperatura da placa e a do fundo (T_f) dependem das emissividades das superfícies. Considerando diferentes emissividades possíveis (iguais aos coeficientes de absorção), adicionando $\dot{Q}_{rad,p-f}$ ao balanço da placa, e acrescentando o balanço do fundo às equações anteriores, obtiveram-se os valores da tabela seguinte, para $\dot{q}_{inc,sol} = 1000$ W/m². Como se verifica, a influência global nos resultados é muito pequena. A potência calorífica recebida pelo ar varia, para os valores extremos considerados, apenas cerca de 1%, enquanto o rendimento do coletor varia também apenas cerca de 1%.

$\varepsilon_{p,inf} = \varepsilon_f$	T_p (°C)	T_f (°C)	$\dot{Q}_{rad. p-f}$ $= \dot{Q}_{conv, f-ar}$	$\dot{Q}_{conv, p-ar}$ (W)	$\dot{Q}_{conv, ar}$ (W)	η_{col}
0,01	64,8	41,1	2	1360	1362	0,681
0,5	63,3	43,1	106	1266	1372	0,686
0,7	62,5	44,0	158	1220	1378	0,689
0,99	61,3	45,6	243	1144	1387	0,693

P6.12



Um coletor solar é constituído por vários tubos de vidro (com 100 mm de diâmetro), no interior dos quais existe um outro tubo em alumínio (com 50 mm de diâmetro) que absorve a radiação solar incidente. O espaço entre os tubos contém ar à pressão atmosférica. Os tubos têm um comprimento de 2 m e são selados nas extremidades, estando colocados na horizontal.

No interior do tubo de alumínio circula água, que entra a 40°C, com um caudal de 4 g/s (em cada tubo). As espessuras dos tubos podem desprezar-se.

No exterior o ar (a 20°C) tem um coeficiente de convecção de 20 W/m²K. A atmosfera e superfícies exteriores estão a 20°C.

As propriedades radiativas do tubo de alumínio são: coeficiente de absorção para a radiação solar – 0,95; emissividade para a radiação de comprimentos de onda longos (emitida e trocada com o vidro) – 0,1. As propriedades radiativas do tubo de vidro são: coeficiente de transmissão para a radiação solar – 0,90; coeficiente de absorção para a radiação solar – desprezável; emissividade para a radiação de comprimentos de onda longos (emitida e trocada com o alumínio) – 0,9.

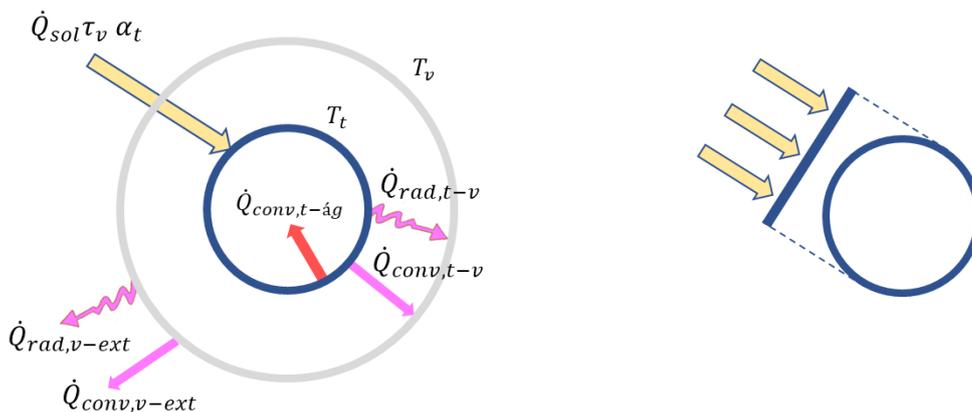
Calcule a temperatura média dos tubos e a potência recebida pela água, quando a irradiação solar (perpendicular ao plano em que se encontram os tubos) é de 1000 W/m². Avalie o comportamento do colector quando varia a radiação solar.

Resolução e discussão

Trata-se de um coletor solar, como o do problema P6.11, mas neste caso com uma geometria tubular, e usando como fluido a água.

A figura seguinte representa as potências caloríficas trocadas no coletor. São usados os índices *v* para o tubo de vidro e *t* para o tubo metálico. Relembre-se que se despreza a radiação solar absorvida pelo tubo de vidro ($\alpha_v \approx 0$). Também não se considera a variação circunferencial da temperatura dos tubos. Quanto à potência devida à radiação solar que incide no tubo metálico, atendendo à geometria circular deve contabilizar-se a área projetada na perpendicular aos raios solares (ver figura). Então:

$$\dot{Q}_{sol} \tau_v = \dot{q}_{inc,sol} A_{t,proj} \tau_v = \dot{q}_{inc,sol} D_t L_t \tau_v = 1000 \times 0,050 \times 2 \times 0,85 = 85 \text{ W}$$



Desprezam-se reflexões no vidro que a superfície do tubo possa receber. Veja-se a esse propósito a discussão no problema P6.11.

A partir da figura podemos então efetuar o balanço térmico (em regime permanente) dos 2 tubos (vidro e metálico), expressando as potências em função das temperaturas. A essas 2 equações juntaremos o balanço da evolução da temperatura (média) da água entre a entrada (T_{ent}) e a saída (T_{sai}), e a sua relação com a temperatura (média) da parede do tubo (equação (2.26)). Temos então 3 equações para cálculo de 3 temperaturas (T_t , T_v e $T_{sai,ág}$):

$$\begin{cases} \frac{2\pi L_t k_{ef,cn}(T_t - T_v)}{\ln(r_v/r_t)} + \frac{A_t \sigma (T_t^4 - T_v^4)}{\frac{1}{\varepsilon_t} + \left(\frac{1}{\varepsilon_v} - 1\right) \frac{r_t}{r_v}} = h_{ext} A_v (T_v - T_{ext}) + A_v \varepsilon_v \sigma (T_v^4 - T_{ext}^4) \\ \dot{Q}_{sol} \tau_v \alpha_t = \dot{M} c_{p,ág} (T_{sai} - T_{ent}) + \frac{2\pi L_t k_{ef,cn}(T_t - T_v)}{\ln(r_v/r_t)} + \frac{A_t \sigma (T_t^4 - T_v^4)}{\frac{1}{\varepsilon_t} + \left(\frac{1}{\varepsilon_v} - 1\right) \frac{r_t}{r_v}} \\ \frac{(T_{sai} - T_t)}{(T_{ent} - T_t)} = \exp\left(-\frac{\bar{h}_{ág} \pi D_t L_t}{\dot{M} c_{p,ág}}\right) \end{cases}$$

contabilizando a condutibilidade efetiva do ar ($k_{ef,cn}$) a convecção natural no espaço confinado (cavidade) entre os 2 tubos. É necessário o seu cálculo, bem como o do coeficiente de convecção na água. Para a condutibilidade efetiva do ar deve seguir-se o método referido no capítulo 2, e aplicado no problema P2.20, que aqui não se detalhará. Para o coeficiente de convecção entre o tubo e a água, seguindo também a metodologia do capítulo 2, com um caudal de 4 g/s obter-se-á um escoamento laminar, com $\bar{h}_{ág} = 56 \text{ W/m}^2\text{C}$.

Substituindo os valores conhecidos temos:

$$\begin{cases} \frac{2\pi \times 2 \times k_{ef,cn}(T_t - T_v)}{\ln(100/50)} + \frac{\pi \times 0,05 \times 2 \times 5,67 \times 10^{-8} \times (T_t^4 - T_v^4)}{\frac{1}{0,1} + \left(\frac{1}{0,9} - 1\right) \times \frac{50}{100}} = 20 \times \pi \times 0,1 \times 2 \times (T_v - T_{ext}) + \\ \quad + \pi \times 0,1 \times 2 \times 0,9 \times 5,67 \times 10^{-8} \times (T_v^4 - 293,15^4) \\ 100 \times 0,85 \times 0,95 = 0,004 \times 4190 \times (T_{sai} - 313,15) + \frac{2\pi \times 2 \times k_{ef,cn}(T_t - T_v)}{\ln(100/50)} + \\ \quad + \frac{\pi \times 0,05 \times 2 \times 5,67 \times 10^{-8} \times (T_t^4 - T_v^4)}{\frac{1}{0,1} + \left(\frac{1}{0,9} - 1\right) \times \frac{50}{100}} \\ \frac{(T_{sai} - T_t)}{(313,15 - T_t)} = \exp\left(-\frac{56 \times \pi \times 0,05 \times 2}{0,004 \times 4190}\right) \end{cases}$$

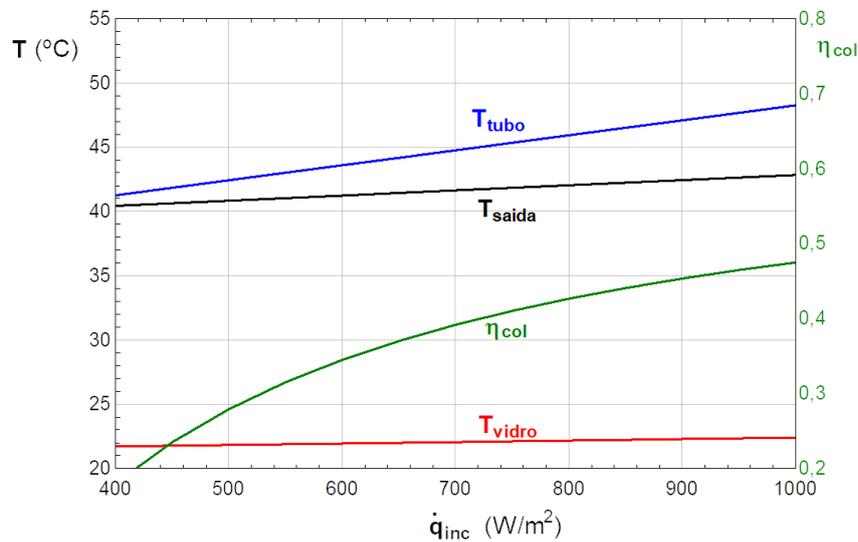
A resolução deste sistema, em simultâneo com o cálculo de $k_{ef,cn}$, permite encontrar a solução:

$$\begin{cases} T_t = 48,2^\circ\text{C} \\ T_v = 22,4^\circ\text{C} \\ T_{sai} = 42,8^\circ\text{C} \\ h_{cn,t-v} = 4,0 \text{ W/m}_t^2\text{K} \end{cases}$$

O coeficiente de convecção natural $h_{cn,t-v}$ refere-se à área de tubo interior (diâmetro interior). Pode calcular-se um coeficiente global de transferência de calor, desde a temperatura do tubo interior até à temperatura exterior, que representa um coeficiente global de perdas do coletor, e é igual a $4,3 \text{ W/m}_t^2\text{K}$. Pode também quantificar-se a percentagem da radiação solar incidente (fora do coletor) que é comunicada ao fluido, que é o seu rendimento térmico:

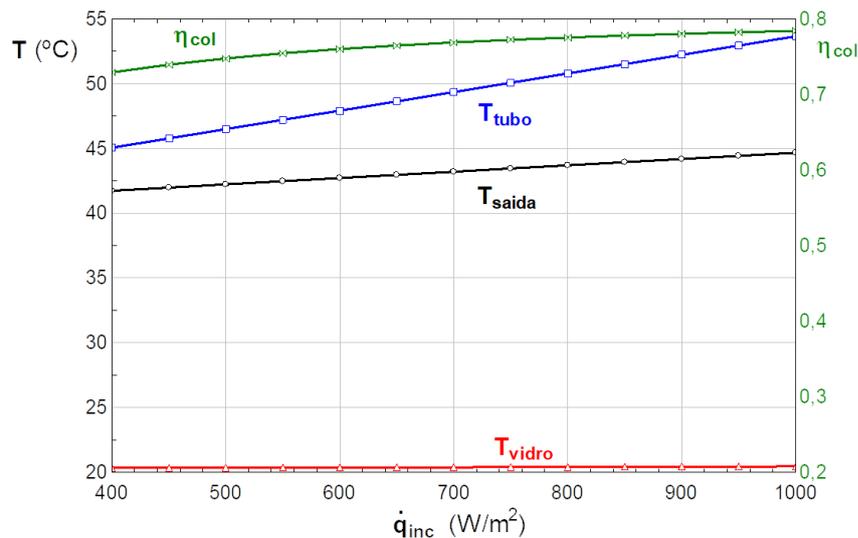
$$\eta_{col} = \frac{\dot{Q}_{conv,t-ág}}{\dot{Q}_{sol}} = \frac{0,004 \times 4190 \times (42,8 - 40)}{\dot{q}_{inc,sol} A_{t,proj}} = 0,47$$

Para avaliar o comportamento do colector quando varia a radiação solar incidente foram repetidos os cálculos com valores de $\dot{q}_{inc,sol}$ entre 400 e 1000 W/m², apresentando-se os resultados no gráfico seguinte.

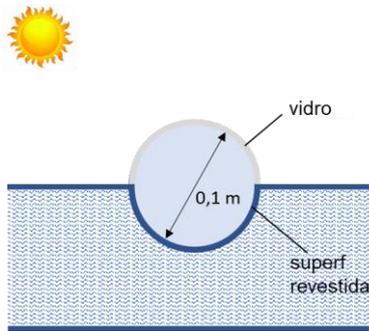


Ao variar \dot{q}_{inc} o coeficiente de convecção natural varia pouco, entre 3,8 e 4,0 W/m²K, variando a temperatura do tubo entre 41,2 e 48,3°C. A temperatura do vidro varia muito pouco, mais influenciada pela temperatura exterior. Quanto ao coeficiente global de perdas do coletor, varia entre 4,0 e 4,3 W/m²K; o seu aumento deve-se ao aumento da temperatura do tubo interior, aliada ao maior peso da radiação com o aumento de T_t .

Pode melhorar-se o comportamento (rendimento) do coletor eliminando as perdas por convecção entre o tubo interior e o de vidro, o que se consegue fazendo o vácuo no espaço entre ambos – coletores designados por coletores de tubos de vácuo. Refazendo os cálculos com a eliminação do termo de convecção natural dos balanços, obtêm-se os resultados do gráfico seguinte.



A comparação com o gráfico anterior mostra que se atingem temperaturas do tubo interior mais altas (até 53,7°C, em vez de até 48,3°C), resultando num maior rendimento do coletor, com uma maior diferença para irradiações mais baixas. O rendimento atinge 78% para a irradiação máxima, em vez dos 47% quando não há vácuo. O coeficiente global de perdas do coletor tem agora valores muito inferiores, variando entre 0,64 e 0,66 W/m²K.

P6.13


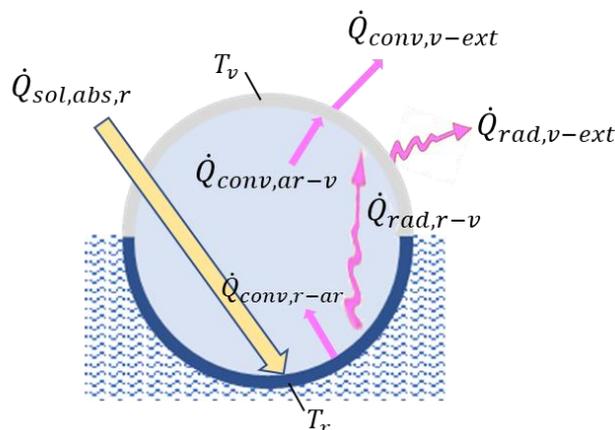
A figura representa uma conduta em que circulam $0,025 \text{ m}^3/\text{s}$ de ar, sendo metade do seu perímetro em vidro e a outra metade numa superfície opaca com um revestimento seletivo, e isolada na face posterior. Ambas as metades se podem considerar com espessura desprezável. O escoamento faz-se ao longo de 2 m (dimensão perpendicular ao plano da figura), entrando o ar a 25°C . No exterior o ar (a 25°C) tem um coeficiente de convecção de $20 \text{ W}/\text{m}^2\text{K}$. A atmosfera e superfícies exteriores estão a 25°C .

As propriedades radiativas do revestimento são: coeficiente de absorção para a radiação solar – $0,92$; emissividade para a radiação de comprimentos de onda longos (emitida e trocada com o vidro) – $0,05$. As propriedades radiativas do vidro são: coeficiente de transmissão para a radiação solar – $0,85$; coeficiente de absorção para a radiação solar – desprezável; emissividade para a radiação de comprimentos de onda longos (emitida e trocada com o revestimento) – $0,8$. Calcule a temperatura média do revestimento e do vidro, e a temperatura de saída do ar, quando a irradiação solar (perpendicular ao plano em que se encontra o conjunto) é de $1000 \text{ W}/\text{m}^2$. Avalie o comportamento deste coletor solar quando varia a radiação solar.

Resolução e discussão

A conduta em análise comporta-se como um coletor solar, captando radiação solar graças à metade superior em vidro, e transferindo parte do calor ganho para o ar, que aquece ao longo do escoamento.

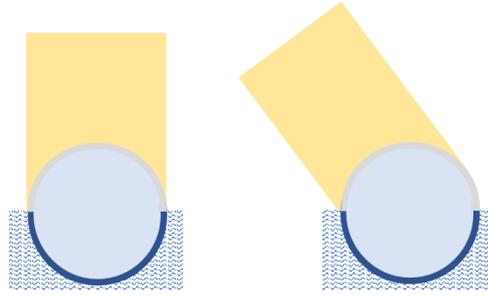
A figura seguinte representa as potências caloríficas trocadas na conduta coletora. São usados os índices v para a parede de vidro e r para a metade opaca e revestida da conduta. Despreza-se a radiação solar absorvida pelo tubo de vidro ($\alpha_v \approx 0$). Também não se considera a variação circunferencial da temperatura dos tubos e o calor transferido por condução entre a metade revestida e a metade em vidro.



Quanto à potência associada à radiação solar que incide no exterior da conduta, atendendo à geometria circular e à incidência perpendicular, ela é igual à irradiação multiplicada pela área projetada da conduta, ou seja:

$$\dot{Q}_{sol} = \dot{q}_{inc,sol} A_{proj} = \dot{q}_{inc,sol} DL = 1000 \times 0,1 \times 2 = 200 \text{ W}$$

Note-se que se a incidência solar não for perpendicular ao plano da conduta, a área projetada será menor e menos potência atravessa o vidro, como ilustra a figura seguinte.



Uma parte da potência \dot{Q}_{sol} atravessa o vidro (τ_v) e uma parte desta é absorvida pelo revestimento (α_r). A outra parte (não absorvida) é refletida pelo revestimento, e uma parte desta é recebida e absorvida pelo próprio revestimento; considerando a reflexão difusa será igual a

$$\dot{Q}_{sol} \tau_v \rho_r F_{r-r} \alpha_r$$

sendo F_{r-r} o fator de visão que corresponde à radiação que o revestimento envia para si próprio. Assim, o total de potência devida à radiação solar que é absorvida (ganha) pelo revestimento é igual a:

$$\dot{Q}_{sol,abs,r} = \dot{Q}_{sol} \tau_v \alpha_r + \dot{Q}_{sol} \tau_v \rho_r F_{r-r} \alpha_r = \dot{Q}_{sol} \tau_v \alpha_r (1 + \rho_r F_{r-r})$$

Desprezam-se re-reflexões por terem um peso diminuto. Considera-se que a parte que o revestimento reflete e não vai para o próprio revestimento, atravessa novamente o vidro e vai para o exterior (perde-se).

O fator F_{r-r} pode calcular-se com auxílio de um plano imaginário (i) situado no centro do círculo, cujo fator $F_{i-r} = 1$, pelo que da relação de reciprocidade vem

$$F_{r-i} = \frac{A_i}{A_r} F_{i-r} = \frac{D}{\pi D/2} F_{i-r} = \frac{2}{\pi} = 0,637 \quad \Rightarrow \quad F_{r-r} = 1 - F_{r-i} = 0,363$$

Note-se que o fator de visão do revestimento para o vidro (que é igual ao seu recíproco), que usaremos a seguir, é igual a F_{r-i} .

Então a potência absorvida pelo revestimento será:

$$\dot{Q}_{sol,abs,r} = 200 \times 0,85 \times 0,92 \times (1 + 0,08 \times 0,363) = 161 \text{ W}$$

Como ρ_r é muito baixo (0,08), a segunda parcela é muito menor, e poderia ter sido desprezada (o valor a considerar seria de 156 W).

A partir do esquema de potências da figura podemos então efetuar o balanço térmico (em regime permanente) das 2 superfícies que formam a conduta (revestimento e vidro), e expressar as potências em função das temperaturas:

$$\begin{cases} \dot{Q}_{sol,abs,r} = \dot{Q}_{conv,r-ar} + \dot{Q}_{rad,r-v} \\ \dot{Q}_{conv,ar-v} + \dot{Q}_{rad,r-v} = \dot{Q}_{conv,v-ext} + \dot{Q}_{rad,v-ext} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{Q}_{sol,abs,r} = h_{ar} A_r (T_r - T_{ar}) + \frac{\sigma(T_r^4 - T_v^4)}{\frac{1-\varepsilon_r}{A_r \varepsilon_r} + \frac{1}{A_r F_{r-v}} + \frac{1-\varepsilon_v}{A_v \varepsilon_v}} \\ h_{ar} A_v (T_{ar} - T_v) + \frac{\sigma(T_r^4 - T_v^4) A_r}{\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r} + \frac{1}{F_{r-v}} + \frac{1-\varepsilon_v}{\varepsilon_v}} = h_{ext} A_v (T_v - T_{ext}) + \varepsilon_v \sigma (T_v^4 - T_{ext}^4) A_v \end{cases}$$

Nas equações anteriores admite-se o mesmo coeficiente de convecção nas 2 superfícies (h_{ar}), e considera-se que T_r , T_v e T_{ar} são temperaturas médias ao longo da conduta. No caso do ar podemos associar a evolução da sua temperatura com a transferência de calor para as paredes da conduta (neste caso as 2 superfícies – revestimento e vidro). Para tal, teremos de adaptar a equação (2.26), que foi obtida para uma parede da conduta a uma única temperatura (média).

O sentido considerado para as 2 potências convectivas ($\dot{Q}_{conv,r-ar}$ e $\dot{Q}_{conv,ar-v}$) foi o que corresponde à realidade, ou seja, o revestimento está mais quente que o ar, e este mais quente que o vidro, como veremos nos resultados. No entanto repare-se que poderíamos ter considerado sentidos diferentes: se considerássemos $\dot{Q}_{conv,v-ar}$ em vez de $\dot{Q}_{conv,ar-v}$ a potência viria com sinal contrário mas seria contabilizada como um ganho, o que é equivalente. Assim, podemos efetuar o seguinte balanço para a evolução da temperatura de mistura do ar, em substituição da equação (2.25):

$$\begin{aligned} \dot{M}_{ar} c_{p,ar} dT_{m,ar} &= h_{ar} \frac{P}{2} dx [(T_r - T_{m,ar}) + (T_v - T_{m,ar})] = \\ &= h_{ar} P dx \left(\frac{T_r + T_v}{2} - T_{m,ar} \right) \end{aligned}$$

que, integrada desde a entrada (T_{ent}) até à saída (T_{sai}), permite escrever:

$$\frac{T_{sai} - \frac{T_r + T_v}{2}}{T_{ent} - \frac{T_r + T_v}{2}} = \exp\left(-\frac{h_{ar} \pi D L}{\dot{M}_{ar} c_{p,ar}}\right)$$

Juntando a esta equação o balanço global para o escoamento de ar (variação de energia entre a entrada e a saída igual ao balanço das trocas convectivas), e às 2 equações anteriores, temos o seguinte sistema de 4 equações para calcular T_r , T_v , T_{ar} e T_{sai} :

$$\begin{cases} \dot{Q}_{sol,abs,r} = h_{ar} A_r (T_r - T_{ar}) + \frac{\sigma(T_r^4 - T_v^4)}{\frac{1-\varepsilon_r}{A_r \varepsilon_r} + \frac{1}{A_r F_{r-v}} + \frac{1-\varepsilon_v}{A_v \varepsilon_v}} \\ h_{ar} A_v (T_{ar} - T_v) + \frac{\sigma(T_r^4 - T_v^4) A_r}{\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r} + \frac{1}{F_{r-v}} + \frac{1-\varepsilon_v}{\varepsilon_v}} = h_{ext} A_v (T_v - T_{ext}) + \varepsilon_v \sigma (T_v^4 - T_{ext}^4) A_v \\ \dot{M}_{ar} c_{p,ar} (T_{sai} - T_{ent}) = h_{ar} A_r (T_r - T_{ar}) - h_{ar} A_v (T_{ar} - T_v) \\ \frac{T_{sai} - \frac{T_r + T_v}{2}}{T_{ent} - \frac{T_r + T_v}{2}} = \exp\left(-\frac{h_{ar} \pi D L}{\dot{M}_{ar} c_{p,ar}}\right) \end{cases}$$

T_{ar} é, como se disse, o valor médio da temperatura do ar na conduta (diferente da média aritmética entre T_{ent} e T_{sai}). Teremos de calcular o coeficiente de convecção, para podermos resolver o sistema de equações.

Para o escoamento de ar, com as propriedades tomadas a 30°C (como estimativa da média conduta-fluido), vem:

$$v_m = \frac{\dot{V}_{ar}}{\pi D^2 / 4} = \frac{0,025}{\pi \times 0,1^2 / 4} = 3,2 \text{ m/s}$$

$$Re_{Dh} = \frac{\rho_{ar} v_m D}{\mu_{ar}} = \frac{1,149 \times 3,2 \times 0,1}{1,872 \times 10^{-5}} = 19641$$

o que significa que o escoamento se dá em regime turbulento, vindo pela equação de Dittus-Boelter:

$$Nu_{D,desenv} = 0,023 Re_D^{0,8} Pr^{0,4} = 55,1$$

No regime turbulento o comprimento de entrada (até à zona de camada limite térmica desenvolvida) é de cerca de 10 diâmetros – equação (2.19) – o que neste caso significa 0,2 m de comprimento (10% do comprimento de escoamento). Contabilizando o seu efeito com a equação (2.23), temos:

$$\overline{Nu}_D = Nu_{D,desenv} \left(1 + \frac{1}{(L/D)^{2/3}} \right) = 55,1 \times \left(1 + \frac{1}{(2/0,1)^{2/3}} \right) = 62,6$$

Então o coeficiente de convecção médio será:

$$h_{ar} = \frac{\overline{Nu}_D k}{D_h} = \frac{62,6 \times 0,02588}{0,1} = 16,2 \text{ W/m}^2\text{°C}$$

Substituindo todos os valores conhecidos, o sistema de equações a resolver é então:

$$\begin{cases} 161 = 16,2 \times \frac{\pi \times 0,1 \times 2}{2} \times (T_r - T_{ar}) + \frac{\sigma \times (T_r^4 - T_v^4) \times \frac{\pi \times 0,1 \times 2}{2}}{\frac{1-0,05}{0,05} + \frac{1}{0,637} + \frac{1-0,8}{0,8}} \\ 16,2 \times \frac{\pi \times 0,1 \times 2}{2} \times (T_{ar} - T_v) + \frac{\sigma \times (T_r^4 - T_v^4) \times \frac{\pi \times 0,1 \times 2}{2}}{\frac{1-0,05}{0,05} + \frac{1}{0,637} + \frac{1-0,8}{0,8}} = 20 \times \frac{\pi \times 0,1 \times 2}{2} \times (T_v - T_{ext}) + 0,8 \times \sigma \times (T_v^4 - 298,15^4) \times \frac{\pi \times 0,1 \times 2}{2} \\ 0,0287 \times 1005 \times (T_{sai} - 298,15) = 16,2 \times \pi \times 0,1 \times 2 \times \left(\frac{T_r + T_v}{2} - T_{ar} \right) \\ \frac{T_{sai} - \frac{T_r + T_v}{2}}{298,15 - \frac{T_r + T_v}{2}} = \exp \left(- \frac{16,2 \times \pi \times 0,1 \times 2}{0,0287 \times 1005} \right) \end{cases}$$

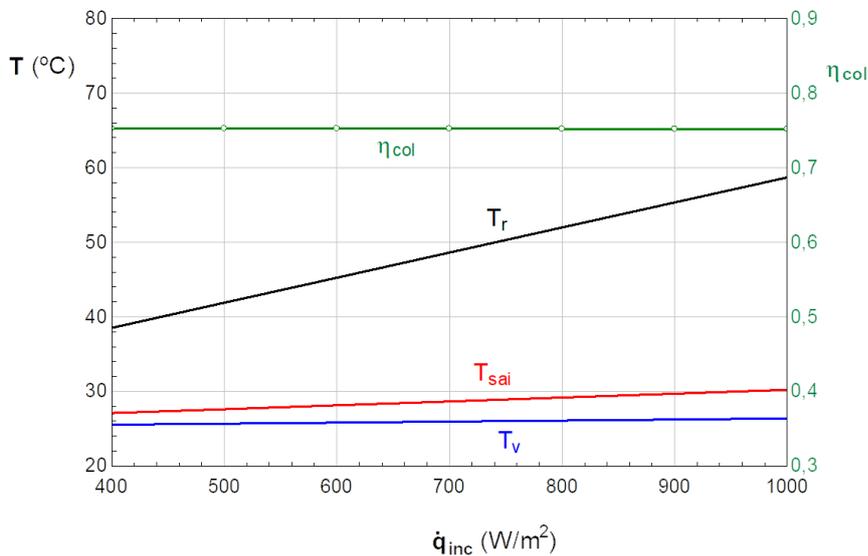
que conduz aos seguintes resultados

$$\begin{cases} T_r = 58,7^\circ\text{C} \\ T_v = 26,4^\circ\text{C} \\ T_{ar} = 27,8^\circ\text{C} \\ T_{sai} = 30,2^\circ\text{C} \end{cases}$$

Podem também quantificar-se a percentagem da radiação solar incidente (fora do coletor na área projetada) que é comunicada ao ar, que é o seu rendimento térmico:

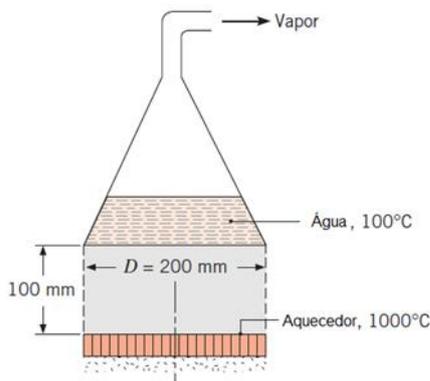
$$\eta_{col} = \frac{\dot{Q}_{ar}}{\dot{Q}_{sol}} = \frac{0,0287 \times 1005 \times (30,2 - 25)}{200} = 0,75$$

Para avaliar o comportamento do coletor quando varia a radiação solar incidente, foram repetidos os cálculos com valores de $\dot{q}_{inc,sol}$ entre 400 e 1000 W/m², apresentando-se os resultados no gráfico seguinte.



As variações das temperaturas quando varia a intensidade da radiação solar são praticamente lineares, e o rendimento térmico mantém-se praticamente constante nos 75%. Note-se que, no entanto, e como se disse anteriormente, se assumiu que a radiação solar incide sempre perpendicularmente ao plano da conduta/coletor. Como tal não se verifica na maior parte do tempo (a não ser que a conduta/coletor siga o sol), há uma perda de área útil de captação, pelo que a sua performance irá diminuir.

P6.14



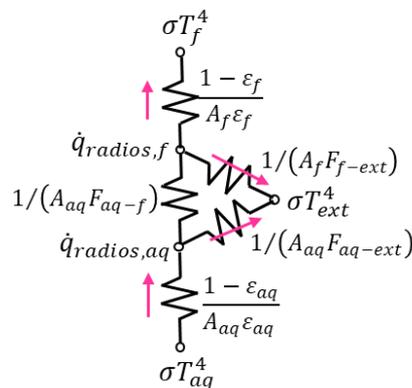
A figura representa um dispositivo de produção de vapor de água à pressão atmosférica, composto por um aquecedor cilíndrico mantido a 1000°C, separado 100 mm do contentor de água. Depois de a água entrar em ebulição, produz-se vapor. O conjunto está colocado num ambiente no qual ar e superfícies se encontram a 25°C, tendo estas uma área muito superior às do aquecedor e contentor. A superfície do aquecedor (cinzenta e difusa) tem uma emissividade de 0,9, tal como o fundo do contentor (de espessura desprezável).

Calcule a temperatura do fundo do recipiente, o caudal de vapor produzido e a potência de aquecimento, considerando todos os modos de transferência de calor.

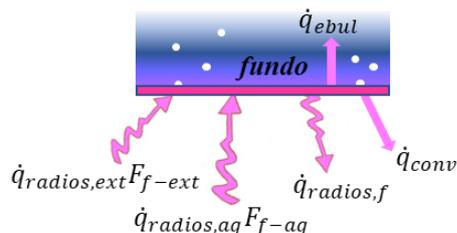
Resolução e discussão

Quando a água entra em ebulição saturada mantém a sua temperatura a 100°C, havendo evaporação à superfície. O fundo do contentor (*f*) está a uma temperatura superior, provocando a ebulição, que se deve à radiação térmica recebida da superfície aquecedora (*aq*), mantida a 1000°C. As superfícies exteriores (*ext*) em conjunto com as outras 2 formam um volume fechado, e podem considerar-se negras por terem uma área muito grande.

Então podemos representar as trocas radiativas pelo esquema seguinte:



Não conseguimos calcular uma resistência equivalente, embora possamos usar o esquema acima para expressar as potências radiativas. No entanto, como existem outros modos de transferência de calor, vamos considerar todos os fluxos no fundo do contentor, e o seu balanço térmico. A figura seguinte ilustra os fluxos em presença.



O balanço térmico pode escrever-se como:

$$\dot{q}_{radios,ext}F_{f-ext} + \dot{q}_{radios,aq}F_{f-aq} = \dot{q}_{radios,f} + \dot{q}_{conv} + \dot{q}_{ebul}$$

O fluxo de ebulição corresponde ao calor ganho pela superfície inferior, e pode expressar-se em função da temperatura do recipiente e da temperatura de saturação da água. Vamos admitir a existência de ebulição nucleada e usar a equação de Rohsenow (4.1), o que verificaremos após calcular a temperatura do fundo do recipiente. Então:

$$\dot{q}_{ebul} = \mu_l \Delta h_{lv} \left[\frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma} \right]^{1/2} \left[\frac{c_{p,l}(T_f - T_{sat})}{C_{sf} \Delta h_{lv} Pr_l^n} \right]^3$$

ou, com as propriedades da água a $T_{sat} = 100^\circ\text{C}$, e $C_{sf} = 0,013$ (recipiente em aço polido):

$$\begin{aligned} \dot{q}_{ebul} &= 0,282 \times 10^{-3} \times 2257 \times 10^3 \times \left[\frac{9,8 \times (957,9 - 0,60)}{0,0589} \right]^{1/2} \times \left[\frac{4217 \times (T_f - 373,15)}{0,013 \times 2257 \times 10^3 \times 1,751} \right]^3 \\ &= 140,71 \times (T_f - 373,15)^3 \end{aligned}$$

usando a temperatura em K, devido aos fluxos radiativos.

Em relação à convecção natural, vamos desprezar as interações dos movimentos do ar nas superfícies do aquecedor e do recipiente; no fundo do recipiente temos o equivalente a uma placa mais quente que o ar, com convecção na face inferior. Usando a correlação da Tabela 2.4 temos

$$Nu = 0,27 (Gr_{L_c} Pr)^{1/4} = h_f L_c / k_{ar}$$

cujos limites de validade ($10^5 < Gr Pr < 10^{11}$) verificaremos depois de calculada a temperatura, e em que a dimensão característica (disco) é igual a:

$$L_c = \frac{A}{P} = \frac{\pi D^2/4}{\pi D} = \frac{D}{4} = 0,05 \text{ m}$$

Para avaliação das propriedades do ar vamos usar uma temperatura média de 65°C , admitindo para o recipiente uma temperatura próxima dos 105°C . Podemos então escrever o coeficiente de convecção natural como:

$$\begin{aligned} h_f &= \frac{k_{ar}}{L_c} \times 0,27 \times \left(\frac{g \beta_{ar} L_c^3}{\nu_{ar}^2} Pr \right)^{1/4} \times (T_f - 298,15)^{1/4} = \\ &= 1,390 \times (T_f - 298,15)^{1/4} \end{aligned}$$

O fluxo convectivo será então:

$$\dot{q}_{conv} = 1,390 \times (T_f - 298,15)^{5/4}$$

Vamos também usar as equações das radiosidades do aquecedor (aq) e do fundo do recipiente (f):

$$\dot{q}_{radios,aq} = \varepsilon_{aq} \sigma T_{aq}^4 + (1 - \varepsilon_{aq}) (\sigma T_{ext}^4 F_{aq-ext} + \dot{q}_{radios,f} F_{aq-f})$$

$$\dot{q}_{radios,f} = \varepsilon_f \sigma T_f^4 + (1 - \varepsilon_f) (\sigma T_{ext}^4 F_{f-ext} + \dot{q}_{radios,aq} F_{f-aq})$$

Os fatores de visão $F_{aq-f} = F_{f-aq}$ são obtidos para 2 discos circulares paralelos, através da informação da Figura 5.11. Sendo $R_i = r_i/L = 1$, $R_j = 1$ e $S = 3$, vem $F_{aq-f} = 0,38$ e

$$F_{aq-ext} = 1 - F_{aq-f} = 0,62 = F_{f-ext}$$

Podemos então combinar estas 2 equações de radiosidade com o balanço do fundo do recipiente, usando as expressões obtidas para os fluxos de ebulição e convecção.

Temos assim o sistema de 3 equações:

$$\begin{cases} \sigma \times 298,15^4 \times 0,62 + \dot{q}_{radios, aq} \times 0,38 = \dot{q}_{radios, f} + 1,390 \times (T_f - 298,15)^{5/4} + 140,71 \times (T_f - 373,15)^3 \\ \dot{q}_{radios, aq} = 0,9 \times \sigma \times 1273,15^4 + 0,1 \times (\sigma \times 298,15^4 \times 0,62 + \dot{q}_{radios, f} \times 0,38) \\ \dot{q}_{radios, f} = 0,9 \times \sigma \times T_f^4 + 0,1 \times (\sigma \times 298,15^4 \times 0,62 + \dot{q}_{radios, aq} \times 0,38) \end{cases}$$

sistema não linear que permite calcular as 2 radiosidades e a temperatura do fundo do recipiente. Os resultados são:

$$\begin{cases} T_f = 380 \text{ K} = 106,8^\circ\text{C} \\ \dot{q}_{radios, aq} = 134346 \text{ W/m}^2 \\ \dot{q}_{radios, f} = 6197 \text{ W/m}^2 \end{cases}$$

Quanto à validade das correlações usadas, podemos agora verificar que o regime de ebulição é efetivamente o de ebulição nucleada, tendo em conta a temperatura da superfície de $106,8^\circ\text{C}$. Para a convecção natural também se verifica um valor de $Ra = 5,4 \times 10^5$, validando a correlação usada.

A partir dos valores calculados podemos agora calcular as potências caloríficas envolvidas. A potência radiativa (balanço) recebida pelo fundo é de 1418 W, dos quais 1407 W são usados para promover a ebulição da água. A potência de convecção, devido ao reduzido coeficiente, igual a $4 \text{ W/m}^2\text{K}$, é de apenas 11 W, tendo um pequeno peso.

Podemos também calcular o caudal de água vaporizado; desprezando perdas de calor do recipiente, teremos

$$\dot{M}_v = \frac{\dot{Q}_{ebul}}{\Delta h_{lv}} = \frac{1407}{2257 \times 10^3} = 0,623 \times 10^{-3} \text{ kg/s}$$

A potência a fornecer ao aquecedor, de modo a mantê-lo a 1000°C , será igual ao balanço radiativo das trocas com o recipiente e exterior, acrescida da potência perdida por convecção para o ar. Quanto à parcela radiativa, tomando por base o esquema de resistências anteriormente apresentado, deverá ser de:

$$|\dot{Q}_{rad, aq}| = \frac{\frac{\sigma T_{aq}^4 - \dot{q}_{radios, aq}}{1 - \varepsilon_{aq}}}{A_{aq} \varepsilon_{aq}} = \frac{5,67 \times 10^{-8} \times 1273,15^4 - 134346}{\frac{1 - 0,9}{\pi \times 0,1^2 \times 0,9}} = 4135 \text{ W}$$

Quanto à convecção, estando a superfície do aquecedor a 1000°C , e usando propriedades do ar à temperatura média aritmética ($512,5^\circ\text{C}$), obtêm-se com a correlação da Tabela 2.4 (placa com superfície superior mais quente que o fluido):

$$Ra_{aq} = 161384 \Rightarrow h_{aq} = 10,6 \text{ W/m}^2\text{K}$$

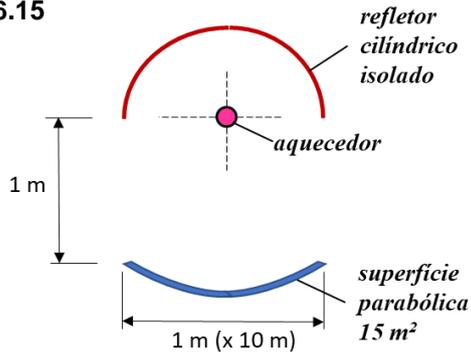
Adicionando a convecção ao balanço radiativo já calculado temos:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{aq} &= \dot{Q}_{rad, aq} - h_{aq} A_{aq} (T_{aq} - T_{ar}) = -4135 - 10,6 \times \pi \times 0,1^2 \times (1000 - 25) = \\ &= -4460 \text{ W} \end{aligned}$$

No caso do aquecedor a convecção tem mais peso, devido à elevada temperatura. No entanto representa menos de 8% da potência a fornecer ao aquecedor.

Também se nota que, da potência gasta no aquecedor, a maior parte é perdida para o exterior, sobretudo por radiação. A percentagem que efetivamente produz vapor é de apenas cerca de 32%.

P6.15



Pretende-se avaliar o conjunto da figura para aquecimento de uma superfície parabólica, usando um aquecedor de infravermelhos cilíndrico (com 1 cm de diâmetro), cuja superfície é mantida a 1300 K. A emissividade do aquecedor é de 0,9 e a da superfície parabólica de 0,5 (ambas cinzentas e difusas). O refletor cilíndrico está perfeitamente isolado na face superior.

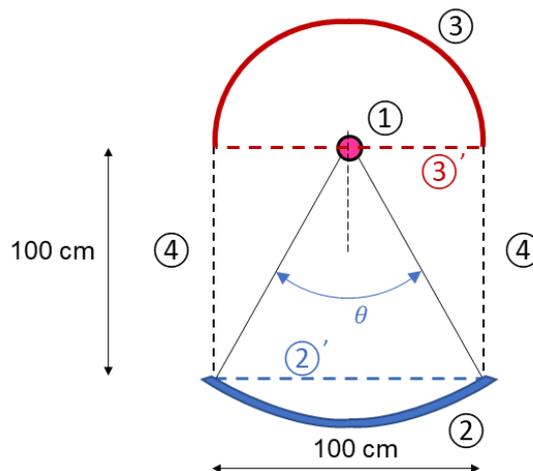
O conjunto está colocado numa sala com superfícies envolventes a 300 K, que se comportam como corpos negros face ao conjunto (área muito superior).

Calcule a potência de aquecimento e a temperatura conseguida na superfície a tratar, considerando as superfícies muito longas para cálculo dos fatores de visão (infinitas no plano perpendicular ao desenho), e considerando a existência de convecção com o ar calmo na sala a 300 K. Atendendo à sua forma, a convecção na face inferior do refletor cilíndrico pode ser desprezada. Quanto à superfície parabólica, considere-a como uma placa plana (com 1,5 m x 10 m) para efeitos de convecção, não transferindo calor na face inferior (isolada).

Resolução e discussão

Este problema assemelha-se ao problema P5.11, sendo o aquecedor plano substituído por um aquecedor cilíndrico, que dispõe de um refletor isolado posteriormente para orientar a radiação para a superfície a tratar (parabólica). Mas as condições de temperatura são diferentes, bem como a existência de convecção.

Temos um volume fechado composto por 4 superfícies que trocam radiação: o aquecedor (1), a superfície a tratar (2), o refletor cilíndrico isolado (3) e as superfícies exteriores (4). O conjunto é muito longo (leia-se infinito) na direção perpendicular ao plano do desenho. A figura seguinte esquematiza as superfícies a considerar.



Sendo neste caso o esquema de resistências de radiação complicado, sem possibilidade de calcular uma resistência equivalente, vamos usar as equações de radiosidades e balanços de modo a calcular a potência de aquecimento (de 1) e as temperaturas desconhecidas (de 2 e 3).

Conhecemos as temperaturas T_1 e T_4 , desconhecendo T_2 e T_3 . O refletor (3) está em equilíbrio apenas com as trocas radiativas, uma vez que a convecção na sua superfície se despreza; por

outro lado sabemos que tem uma radiosidade igual à de um corpo negro, por estar perfeitamente isolada e só trocar calor por radiação. A superfície parabólica (2) está em equilíbrio com as trocas radiativas e convectivas, não se considerando trocas de calor na face inferior. A superfície 4 tem uma radiosidade igual à de um corpo negro, pela sua elevada área. Vamos usar as equações de radiosidade das superfícies 1 e 2, e as equações de balanço daquelas cuja temperatura é desconhecida (2 e 3).

Temos então o seguinte sistema de equações para cálculo das radiosidades, T_2 e T_3 :

$$\begin{cases} \dot{q}_{radios,1} = \varepsilon_1 \sigma 1300^4 + \rho_1 (\dot{q}_{radios,2} F_{1-2} + \dot{q}_{radios,3} F_{1-3} + \dot{q}_{radios,4} F_{1-4}) \\ \dot{q}_{radios,2} = \varepsilon_2 \sigma T_2^4 + \rho_2 (\dot{q}_{radios,1} F_{2-1} + \dot{q}_{radios,2} F_{2-2} + \dot{q}_{radios,3} F_{2-3} + \dot{q}_{radios,4} F_{2-4}) \\ \dot{q}_{conv,2} + \dot{q}_{radios,2} = \dot{q}_{radios,1} F_{2-1} + \dot{q}_{radios,2} F_{2-2} + \dot{q}_{radios,3} F_{2-3} + \dot{q}_{radios,4} F_{2-4} \\ \dot{q}_{radios,3} = \sigma T_3^4 \\ \dot{q}_{radios,3} = \dot{q}_{radios,1} F_{3-1} + \dot{q}_{radios,2} F_{3-2} + \dot{q}_{radios,3} F_{3-3} + \dot{q}_{radios,4} F_{3-4} \\ \dot{q}_{radios,4} = \sigma T_4^4 = \sigma \times 300^4 = 459 \end{cases}$$

A potência trocada por 2 por convecção, para uma placa horizontal mais quente que o fluido, e admitindo $10^7 < Gr Pr < 10^{11}$ (a verificar posteriormente), é dada pela correlação da Tabela 2.4, vindo:

$$h_{conv,2} = \frac{k_{ar}}{L_c} \times 0,15 \times \left(\frac{g \beta_{ar} L_c^3}{\nu_{ar}^2} Pr \right)^{1/3} \times (T_2 - 300)^{1/3}$$

Sendo $L_c = A/P = 15/23 = 0,652$ m (que neste caso não tem influência no coeficiente) e usando propriedades do ar a 350 K (estimativa), teremos:

$$h_{conv,2} = 1,801 \times (T_2 - 300)^{1/3}$$

e

$$\dot{q}_{conv,2} = 1,801 \times (T_2 - 300)^{4/3}$$

Para resolver o sistema precisamos de vários fatores de visão. Para calcular F_{1-2} podemos assumir que o fator é igual ao ângulo θ da figura anterior dividido por 360° (fração do total que sai de 1). O ângulo é de $53,1^\circ$, e o fator F_{1-2} vem igual a 0,148. O fator F_{1-3} , atendendo aos eixos de simetria, é igual a 0,5. E o fator F_{1-4} , pelo princípio da soma, é:

$$F_{1-4} = 1 - F_{1-2} - F_{1-3} = 1 - 0,148 - 0,5 = 0,352$$

Em relação aos fatores com origem em 2, temos:

$$F_{2-1} = \frac{A_1}{A_2} F_{1-2} = \frac{\pi \times 0,01 \times 10}{15} \times 0,148 = 0,003$$

Para calcular F_{2-2} , vamos servir-nos da superfície virtual 2' representada na figura anterior. Sendo $F_{2'-2} = 1$, vem

$$F_{2-2} = 1 - F_{2-2'} = 1 - \frac{A_{2'}}{A_2} F_{2'-2} = 1 - \frac{10}{15} \times 1 = 0,333$$

Podemos também usar a superfície 3' virtual da figura e calcular, através da Figura 5.7, o fator $F_{2'-3'}$ para 2 planos paralelos com uma dimensão infinita. Vem $F_{2'-3'} = 0,414$. Usando

$$F_{2'-3'} = F_{2'-3} + F_{2'-1} = F_{2'-3} + \frac{A_1}{A_{2'}} F_{1-2'} = 0,414$$

vem

$$F_{2'-3} = F_{2'-3'} - \frac{A_1}{A_{2'}} F_{1-2'} = F_{2'-3'} - \frac{A_1}{A_{2'}} F_{1-2} = 0,414 - \frac{\pi \times 0,01}{1} \times 0,148 = 0,409$$

Podemos escrever ainda que:

$$F_{3-2} = F_{3-2'} = \frac{A_{2'}}{A_3} F_{2'-3} = \frac{1}{\pi \times 0,5} \times 0,409 = 0,260$$

vindo o recíproco

$$F_{2-3} = \frac{A_2}{A_3} F_{3-2} = \frac{15}{\pi \times 0,5 \times 10} \times 0,260 = 0,248$$

e

$$F_{2-4} = 1 - F_{2-1} - F_{2-2} - F_{2-3} = 1 - 0,003 - 0,333 - 0,248 = 0,416$$

Em relação aos fatores com origem em 3, temos:

$$F_{3-1} = \frac{A_1}{A_3} F_{1-3} = \frac{\pi \times 0,01 \times 10}{\pi \times 0,5 \times 10} \times 0,5 = 0,01$$

O fator F_{3-2} já foi calculado acima. Para F_{3-3} vamos recorrer a vamos recorrer à referência [5], que indica para o fator de uma superfície semi-cilíndrica infinita para si própria, com a existência de uma superfície cilíndrica infinita com o mesmo centro/eixo:

$$F_{3-3} = 1 - \frac{2}{\pi} \left((1 - R_D^2)^{0,5} + R_D \frac{\pi}{180} \arcsen R_D \right) \text{ [com o arcsen } R_D \text{ em graus]}$$

sendo R_D a razão dos diâmetros. Vem então:

$$F_{3-3} = 1 - \frac{2}{\pi} \left(\left(1 - \left(\frac{1}{100} \right)^2 \right)^{0,5} + \frac{1}{100} \frac{\pi}{180} \arcsen \frac{1}{100} \right) = 0,363(3)$$

Note-se que se desprezarmos a existência do cilindro 1 vamos obter um valor praticamente igual de 0,363(4), devido ao seu pequeno diâmetro. Para os cálculos que se seguem, em que foram usadas 3 casas decimais para os valores dos fatores de visão, não há qualquer diferença.

Finalmente, podemos obter F_{3-4} por diferença para 1:

$$F_{3-4} = 1 - F_{3-1} - F_{3-2} - F_{3-3} = 1 - 0,01 - 0,260 - 0,363 = 0,367$$

Substituindo todos os valores conhecidos, o sistema para cálculo das radiosidades é:

$$\begin{cases} \dot{q}_{\text{radios},1} = 0,9 \sigma 1300^4 + 0,1 \times (\dot{q}_{\text{radios},2} \times 0,148 + \dot{q}_{\text{radios},3} \times 0,5 + 459 \times 0,352) \\ \dot{q}_{\text{radios},2} = 0,5 \sigma T_2^4 + 0,5 \times (\dot{q}_{\text{radios},1} \times 0,003 + \dot{q}_{\text{radios},2} \times 0,333 + \dot{q}_{\text{radios},3} \times 0,248 + 459 \times 0,416) \\ 1,801 \times (T_2 - 300)^{4/3} + \dot{q}_{\text{radios},2} = \dot{q}_{\text{radios},1} \times 0,003 + \dot{q}_{\text{radios},2} \times 0,333 + \dot{q}_{\text{radios},3} \times 0,248 + 459 \times 0,416 \\ \dot{q}_{\text{radios},3} = \sigma T_3^4 \\ \dot{q}_{\text{radios},3} = \dot{q}_{\text{radios},1} \times 0,01 + \dot{q}_{\text{radios},2} \times 0,260 + \dot{q}_{\text{radios},3} \times 0,363 + 459 \times 0,367 \\ \dot{q}_{\text{radios},4} = 459 \text{ W/m}^2 \end{cases}$$

O resultado do sistema é:

$$\begin{cases} \dot{q}_{\text{radios},1} = 145951 \text{ W/m}^2 \\ \dot{q}_{\text{radios},2} = 1435 \text{ W/m}^2 \\ T_2 = 363 \text{ K } (Gr.Pr = 8,0 \times 10^7, h_{\text{conv},2} = 7,1 \text{ W/m}^2\text{K}) \\ \dot{q}_{\text{radios},3} = 3141 \text{ W/m}^2 \\ T_3 = 485 \text{ K} \\ \dot{q}_{\text{radios},4} = 459 \text{ W/m}^2 \end{cases}$$

Antes de calcular a potência a fornecer ao aquecedor, podemos desde já ver que o conjunto não permite uma temperatura muito elevada para um tratamento térmico na superfície parabólica. A temperatura conseguida é apenas 63° superior à exterior. Isso deve-se às perdas radiativas da superfície 2 para o exterior, a par do baixo fator de visão do aquecedor para 2 (0,148). Uma possível solução seria aumentar a temperatura do aquecedor, mas com aumento do consumo de energia: aumentando a temperatura para 1500 K, um novo cálculo conduziria a uma temperatura de 396 K, ainda assim não muito elevada, mas com um aumento de $\dot{q}_{radios,1}$ para 258666 W/m². Mantendo a temperatura do aquecedor, poderia colocar-se a superfície a tratar mais perto deste; passando a distância na vertical a ser de 0,5 m (em vez de 1 m), e refazendo todos os cálculos (novos fatores de visão), passaríamos a ter;

$$\begin{aligned}
 F_{1-2} &= 0,25; F_{1-3} = 0,5; F_{1-4} = 0,25 \\
 F_{2-1} &= 0,005; F_{2-2} = 0,333; F_{2-3} = 0,371; F_{2-4} = 0,246 \\
 F_{3-1} &= 0,01; F_{3-2} = 0,388; F_{3-3} = 0,363; F_{3-4} = 0,239 \\
 \dot{q}_{radios,1} &= 146012 \text{ W/m}^2; \dot{q}_{radios,2} = 2188 \text{ W/m}^2; \dot{q}_{radios,3} = 3797 \text{ W/m}^2 \\
 T_2 &= 396 \text{ K}; T_3 = 509 \text{ K}
 \end{aligned}$$

Essa alteração permitirá aumentar a temperatura também para 396 K, sem alteração da potência consumida.

Quanto à potência a fornecer ao aquecedor, temos de considerar o termo devido à radiação e o termo devido à convecção. Na situação original, teremos:

$$|\dot{Q}_{rad,1}| = \frac{\sigma T_1^4 - \dot{q}_{radios,1}}{(1-\varepsilon_1)/(A_1\varepsilon_1)} = \frac{\sigma \times 1300^4 - 145951}{(1-0,9)/(\pi \times 0,01 \times 10 \times 0,9)} = 45,2 \text{ kW}$$

Já agora, a potência radiativa ganha pela superfície parabólica (2) é igual a

$$\dot{Q}_{rad,2} = \frac{\dot{q}_{radios,2} - \sigma T_2^4}{(1-\varepsilon_2)/(A_2\varepsilon_2)} = \frac{1435 - \sigma \times 363^4}{(1-0,5)/(15 \times 0,5)} = 6,8 \text{ kW}$$

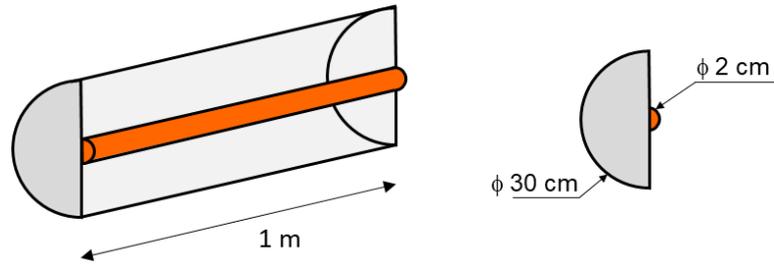
que representa apenas 15% da potência radiativa consumida pelo aquecedor. Se se reduzisse a distância para metade (0,5 m), a potência radiativa ganha pela superfície a tratar (2) seria de 11,9 kW (26% do consumo).

Mas regressando à potência a fornecer ao aquecedor, para o termo convectivo é necessário calcular o coeficiente de convecção, neste caso para convecção em torno de um cilindro horizontal. Usando a correlação da Tabela 2.4 para essa geometria, obter-se-á $h_{conv,1} = 15 \text{ W/m}^2\text{K}$, vindo:

$$\begin{aligned}
 \dot{Q}_{conv,1} &= h_{conv,1} A_1 (T_1 - 300) = 15 \times \pi \times 0,01 \times 10 \times (1300 - 300) = \\
 &= 4,7 \text{ kW}
 \end{aligned}$$

que aumenta o consumo total para 49,9 kW.

P6.16



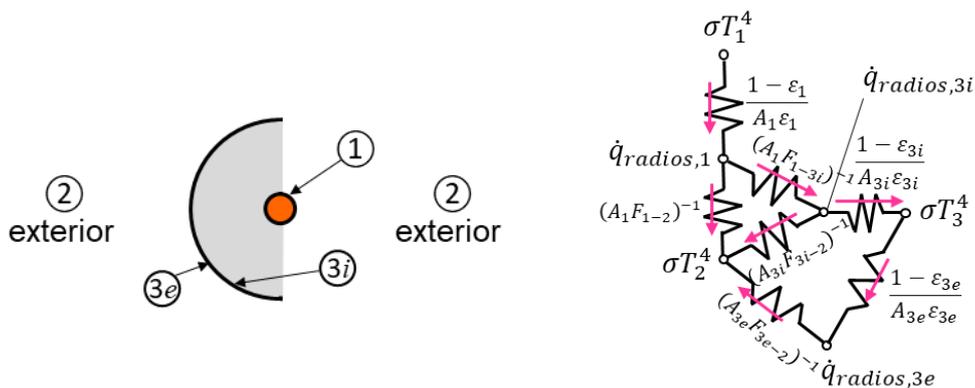
O aquecedor radiador do problema P5.13 deve agora ser tratado considerando que as superfícies refletoras não têm qualquer isolamento e têm uma espessura reduzida. Também se deve considerar a convecção (natural) nas superfícies do aquecedor (elemento aquecedor e superfícies refletoras). Considere o coeficiente de convecção natural nas superfícies refletoras (faces interiores e exteriores) igual a $2 \text{ W/m}^2\text{K}$. Estas têm um elevado coeficiente de reflexão na face interior ($\rho=0,9$, cinzentas e difusas), mas baixo nas faces exteriores ($\rho=0,2$, cinzentas e difusas).

Os restantes dados mantêm-se: temperatura do elemento aquecedor de 600°C (com $\alpha=\varepsilon=0,8$), superfícies do local e ar ambiente à temperatura de 20°C .

Calcule a potência total que o aquecedor fornece à sala (superfícies do local e ar), e a temperatura das superfícies refletoras.

Resolução e discussão

Agora há a considerar que as superfícies refletoras se dividem em 2 com propriedades diferentes: as faces interiores (bastante refletoras) e as faces exteriores (pouco refletoras). Estas últimas só trocam radiação com as superfícies da sala. Poderíamos representar as trocas radiativas pelo esquema seguinte.



No entanto, este esquema não facilita os cálculos radiativos, nem permite adicionar as potências convectivas, que terão de ser também contabilizadas. Também podemos notar que as superfícies 3e só trocam radiação com 2.

A potência radiativa ganha por 2 pode escrever-se somando os 3 balanços das suas trocas com 1, 3i e 3e:

$$\dot{Q}_{rad,2} = \frac{\dot{q}_{radios,1} - \sigma T_2^4}{\frac{1}{A_1 F_{1-2}}} + \frac{\dot{q}_{radios,3i} - \sigma T_2^4}{\frac{1}{A_{3i} F_{3i-2}}} + A_{3e} \varepsilon_{3e} \sigma (T_3^4 - T_2^4)$$

dependendo o seu valor do cálculo de T_3 , $\dot{q}_{radios,1}$ e $\dot{q}_{radios,3i}$.

Para as radiosidades podemos escrever:

$$\dot{q}_{radios,1} = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon_1)(\sigma T_2^4 F_{1-2} + \dot{q}_{radios,3i} F_{1-3i})$$

$$\dot{q}_{radios,3i} = \varepsilon_{3i} \sigma T_3^4 + (1 - \varepsilon_{3i})(\dot{q}_{radios,1} F_{3i-1} + \sigma T_2^4 F_{3i-2} + \dot{q}_{radios,3i} F_{3i-3i})$$

O balanço energético total de (3), consideradas as 2 faces à mesma temperatura, pela sua reduzida espessura, é:

$$\begin{aligned} (\dot{q}_{radios,1} F_{3i-1} + \sigma T_2^4 F_{3i-2} + \dot{q}_{radios,3i} F_{3i-3i}) A_{3i} = \dot{q}_{radios,3i} A_{3i} + \\ + A_{3e} \varepsilon_{3e} \sigma (T_3^4 - T_2^4) + h_{conv,3} (A_{3i} + A_{3e}) (T_3 - T_{ar}) \end{aligned}$$

Estas 3 equações e os fatores calculados em P5.13 permitem-nos escrever o sistema:

$$\begin{cases} \dot{q}_{radios,1} = 0,8 \sigma 873,15^4 + 0,2 (\sigma 293,15^4 \times 0,5 + \dot{q}_{radios,3i} \times 0,5) \\ \dot{q}_{radios,3i} = 0,1 \sigma T_3^4 + 0,9 (\dot{q}_{radios,1} \times 0,058 + \sigma 293,15^4 \times 0,58 + \dot{q}_{radios,3i} \times 0,362) \\ \dot{q}_{radios,1} \times 0,058 + \sigma 293,15^4 \times 0,58 + \dot{q}_{radios,3i} \times 0,362 = \dot{q}_{radios,3i} + 0,8 \sigma (T_3^4 - 293,15^4) + 2 \times 2 \times (T_3 - 293,15) \end{cases}$$

que nos conduz a:

$$\begin{cases} \dot{q}_{radios,1} = 26656 \text{ W/m}^2 \\ \dot{q}_{radios,3i} = 2472 \text{ W/m}^2 \\ T_3 = 316,3 \text{ K} = 43,2^\circ\text{C} \end{cases}$$

A radiosidade do elemento aquecedor é quase igual à do problema P5.13, que era de 26689 W/m², quando as superfícies refletoras estavam perfeitamente isoladas. O não isolamento destas faz com que a sua temperatura seja significativamente inferior (43,2°C em vez de 198,5°C). Claro que a convecção também contribui para essa diferença. A convecção é responsável por uma perda de 50,2 W nas faces interiores e exteriores do refletor (3i e 3e), enquanto a radiação nas faces exteriores (3e) é responsável por uma perda de 64,5 W.

Quanto à potência radiativa ganha pelas superfícies da sala (2), ela vem igual a

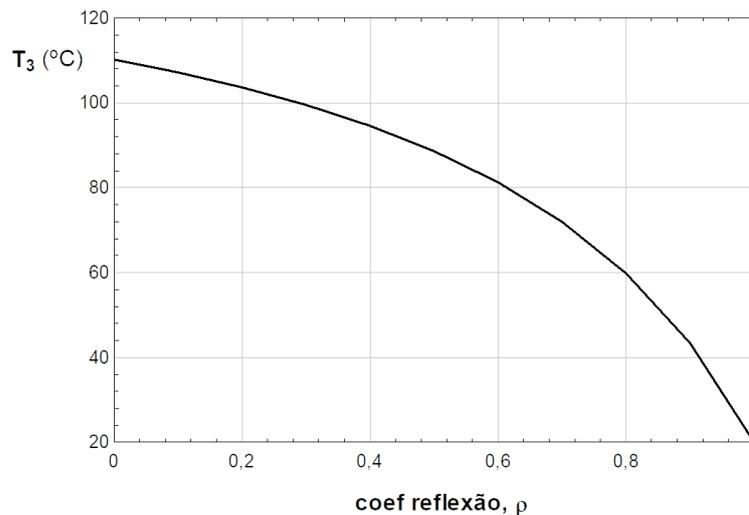
$$\begin{aligned} \dot{Q}_{rad,2} &= \frac{\dot{q}_{radios,1} - \sigma T_2^4}{A_1 F_{1-2}} + \frac{\dot{q}_{radios,3i} - \sigma T_2^4}{A_{3i} F_{3i-2}} + A_{3e} \varepsilon_{3e} \sigma (T_3^4 - T_2^4) = \\ &= \frac{26658 - \sigma 293,15^4}{\pi \times 0,02 \times 1 \times 0,5} + \frac{2492 - \sigma 293,15^4}{\pi \times 0,1725 \times 0,58} + \pi \times 0,1725 \times 0,8 \sigma (316,5^4 - 293,15^4) = \\ &= 1534 \text{ W} \end{aligned}$$

Em P5.13 o correspondente valor era de 1576 W, muito próximo deste, uma vez que o elemento aquecedor é mantido à mesma temperatura. Mas considerando a convecção no elemento aquecedor, a potência para o manter à mesma temperatura terá de ser superior. Considerando a correlação para o coeficiente de convecção natural num cilindro horizontal, para a temperatura em causa obtém-se uma potência libertada por convecção de 431 W (o coeficiente de convecção é igual a 11,8 W/m²K). A potência total a fornecer ao elemento aquecedor será a que ele liberta por convecção (431) mais a que liberta por trocas de radiação (1584), sendo o total de 2015 W.

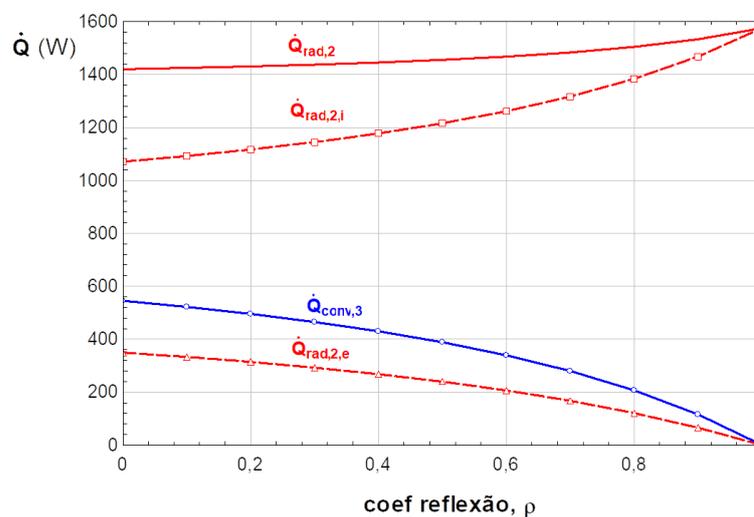
Quanto à sala (2), ganha ainda a potência libertada por convecção pelo elemento aquecedor (1) e pelo refletor (3i e 3e) para o ar interior, num total de 481 W. O total de potência recebida pelas superfícies ($\dot{Q}_{rad,2}$) e ar é de 2015 W, o que verifica a conservação de energia.

Foi feita uma análise à variação do coeficiente de reflexão das superfícies interiores do refletor (3*i*). Este foi variado entre 0 (superfícies negras) e 1 (refletor ideal). A repetição dos cálculos feitos anteriormente conduziu a várias representações gráficas.

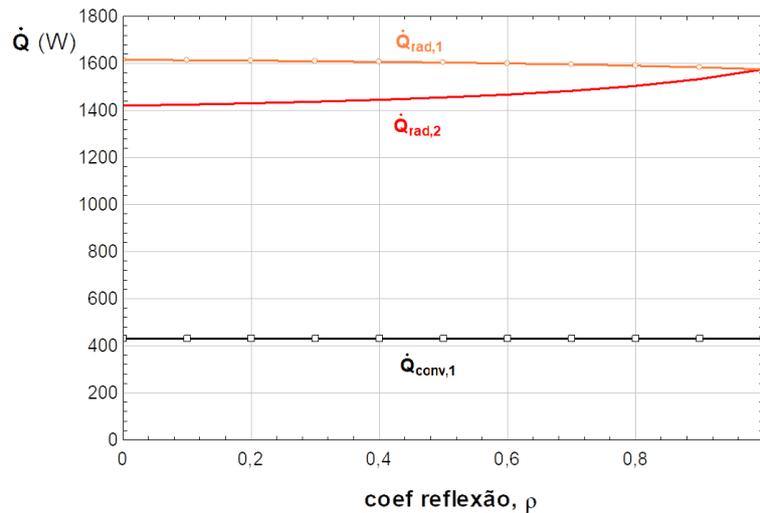
O gráfico seguinte apresenta a variação da temperatura das superfícies refletoras (T_3). Como se pode notar a temperatura diminui acentuadamente com o aumento do coeficiente de reflexão, em particular para valores elevados do coeficiente. Se o coeficiente for igual a 1, toda a radiação que é recebida é refletida, e as superfícies não têm qualquer ganho radiativo, pelo que em equilíbrio ficam à temperatura do ar ambiente (20°C). A temperatura máxima, quando o coeficiente de reflexão é 0 e a emissividade é 1 (corpo negro), é de 110°C. Note-se que este valor é inferior ao do problema P5.13 (quase 200°C), porque as superfícies perdem calor por convecção (nas faces interiores e exteriores do refletor).



O gráfico que se segue representa a variação da potência que as superfícies da sala ganham por radiação ($\dot{Q}_{rad,2}$) e a potência que as superfícies do refletor (3*i* e 3*e*) perdem por convecção. Esta última segue a evolução da temperatura T_3 vista no gráfico anterior, diminuindo com o aumento do coeficiente de reflexão. Quanto a $\dot{Q}_{rad,2}$ aumenta ligeiramente com o aumento do coeficiente de reflexão, aumento que se acentua para os maiores coeficientes: a maior reflexão de 3*i* aumenta a radiação ganha por 2. O gráfico também mostra em separado a parcela dos ganhos vinda das superfícies 1 e 3*i*, $\dot{Q}_{rad,2,i}$, e a que vem de 3*e*, $\dot{Q}_{rad,2,e}$. Esta separação mostra bem que, além de aumentar a potência radiativa global, o aumento do coeficiente de reflexão dirige mais radiação para o “lado i”.

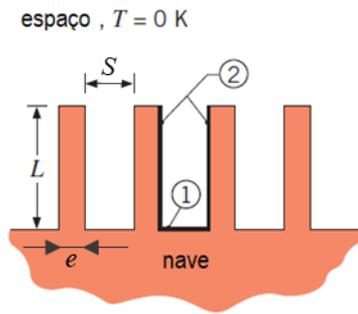


O gráfico seguinte apresenta a mesma variação de $\dot{Q}_{rad,2}$ com o coeficiente de reflexão de $3i$, a par da potência perdida pelo elemento aquecedor por radiação e por convecção. A potência que o aquecedor perde por radiação diminui ligeiramente com o aumento do coeficiente de reflexão; a radiosidade de 1 varia pouco, entre 26531 e 26689 W/m², aumentando ligeiramente com o aumento de ρ_{3i} , mas o elemento aquecedor tem mais radiação incidente vinda de $3i$, que diminui um pouco a sua perda global. Quando o coeficiente de reflexão é igual a 1, a potência radiativa perdida pelo aquecedor ($\dot{Q}_{rad,1}$) é igual à ganha pelas superfícies da sala ($\dot{Q}_{rad,2}$), porque 3 não ganha nada (em termos de balanço), havendo equilíbrio entre 1 e 2.



Na análise feita foi considerado constante o coeficiente de convecção nas superfícies do refletor. Na realidade ele depende da temperatura destas. Poder-se-ia contabilizar uma variação proporcional a $\Delta T^{1/4}$ ou $\Delta T^{1/3}$, mas tal não iria alterar as principais conclusões do estudo.

P6.17



Uma nave espacial situada no espaço, a uma temperatura de 0 K, tem um conjunto de placas retangulares ligadas à sua superfície exterior, como mostra a figura ao lado.

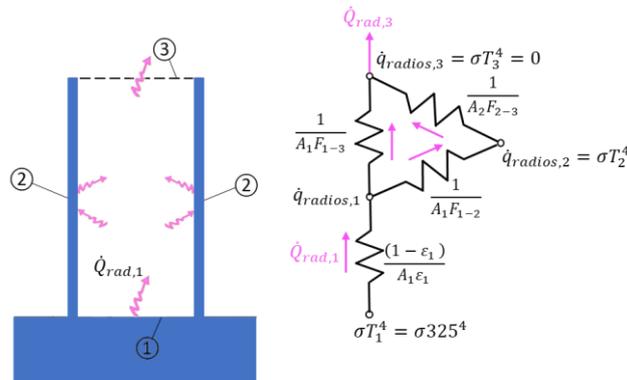
A superfície exterior e a base das placas (1) encontra-se a uma temperatura de 325 K, sendo todas as superfícies cinzentas e difusas, com $\alpha = \epsilon = 0,7$ (1 e 2).

Considerando a secção em U entre placas adjacentes, com $S = 25$ mm, $L = 125$ mm, e um comprimento perpendicular ao plano da figura muito grande, e desprezando a espessura (e) e a condução do calor nas placas, calcule a temperatura da superfície (2) e a potência calorífica perdida pela nave em cada secção, por unidade de comprimento.

Divida agora a superfície (2) (comprimento L) em 4 superfícies de igual dimensão e calcule as novas temperaturas e potência perdida. Depois divida (2) em mais elementos e calcule as suas temperaturas e a potência dissipada; neste último caso considere ainda a condução do calor ao longo da dimensão L , com $e = 5$ mm e uma condutibilidade térmica de 15 W/mK (aço).

Resolução e discussão

Vamos considerar o espaço entre placas intermédias, e para contabilizar adequadamente as trocas de radiação vamos considerar uma superfície virtual (3) que fecha o volume entre placas. A figura a seguir representa as 3 superfícies, as potências caloríficas de radiação (balanço de cada superfície), e as resistências de radiação associadas. A superfície 3, que corresponde ao espaço exterior, está a 0 K (não emite radiação) e comporta-se como um corpo negro, pelo que tem uma radiosidade nula.



Note-se que havendo simetria dos 2 lados de cada placa, as potências transferidas numa placa são iguais às transferidas nas 2 superfícies consideradas como superfície 2. Por outro lado, devido à simetria dos 2 lados de uma mesma placa, a superfície 2 equivale a uma superfície isolada (adiabática) e pode classificar-se como superfície re-radiante. Assim, ela recebe a mesma potência radiativa que perde. Em consequência, a potência perdida pela base ($\dot{Q}_{rad,1}$) é toda dissipada para o espaço ($=\dot{Q}_{rad,3}$).

Para calcular $\dot{Q}_{rad,1} = \dot{Q}_{rad,3}$ podemos calcular a resistência equivalente do triângulo de resistências da figura anterior e da resistência superficial de 1, e a partir dela calcular a potência.

Como também pretendemos calcular T_2 vamos efetuar os balanços nos nodos radiosidade de 1 e de 2:

$$\frac{\sigma 325^4 - \dot{q}_{radios,1}}{\frac{1-0,7}{0,025 \times 0,7}} = \frac{\dot{q}_{radios,1} - \dot{q}_{radios,2}}{\frac{1}{0,025 F_{1-2}}} + \frac{\dot{q}_{radios,1} - 0}{\frac{1}{0,025 F_{1-3}}}$$

$$\frac{\dot{q}_{radios,1} - \dot{q}_{radios,2}}{\frac{1}{0,025 F_{1-2}}} = \frac{\dot{q}_{radios,2} - 0}{\frac{1}{0,025 F_{3-2}}}$$

sendo

$$\dot{q}_{radios,2} = \sigma T_2^4$$

Os fatores de visão necessários são F_{1-3} e F_{3-2} . Quanto a F_{1-3} , podemos usar a expressão da Figura 5.7 (largura infinita), com $W_i = W_j = 25/125 = 0,20$, vindo

$$F_{1-3} = \frac{((0,2+0,2)^2+4)^{1/2} - (0^2+4)^{1/2}}{2 \times 0,2} = 0,099$$

Quanto a F_{3-2} é igual a $1 - F_{3-1}$, sendo $F_{3-1} = F_{1-3}$ por simetria. Então $F_{3-2} = 0,901$.

Substituindo os fatores no sistema de 2 equações acima obtém-se

$$\begin{cases} \dot{q}_{radios,1} = 511,65 \text{ W/m}^2 \\ \dot{q}_{radios,2} = 255,83 \text{ W/m}^2 \end{cases}$$

Então a potência perdida pela base e a temperatura das placas serão:

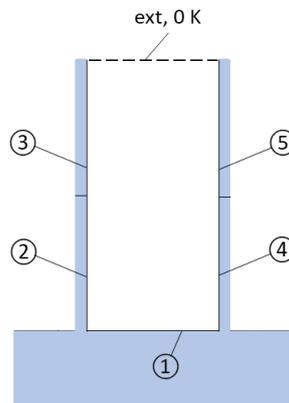
$$\dot{Q}_{rad,1} = \frac{\sigma 325^4 - \dot{q}_{radios,1}}{\frac{1-0,7}{0,025 \times 0,7}} = 7,1 \text{ W/m}$$

$$T_2 = (\dot{q}_{radios,2}/\sigma)^{1/4} = 259 \text{ K}$$

sendo a temperatura 66° inferior à temperatura da base.

Note-se que se não existissem placas na base da nave a potência perdida seria igual a $11,1 \text{ W/m}$ ($= \varepsilon \sigma T_1^4 A_1$), pelo que as placas diminuem a perda de calor da base da nave.

Vamos de seguida dividir as superfícies ② em 2 (cada), o que corresponde à configuração usada na figura que se segue.



Cada superfície i tem uma radiosidade dada por:

$$\dot{q}_{radios,i} = \varepsilon \sigma T_i^4 + (1 - \varepsilon) \sum_{j=1}^5 (\dot{q}_{radios,j} F_{i-j})$$

sendo $T_1 = 325 \text{ K}$. Nesta configuração não existe irradiação de cada superfície para si própria, pelo que os termos $j = i$ do somatório são nulos.

Para além das 5 radiosidades, precisamos de calcular as 4 temperaturas desconhecidas (T_2 a T_5). Para tal vamos considerar as 4 equações de balanço de cada uma (i), na forma:

$$\sum_{j=1}^5 (\dot{q}_{radios,j} F_{i-j}) = \dot{q}_{radios,i}$$

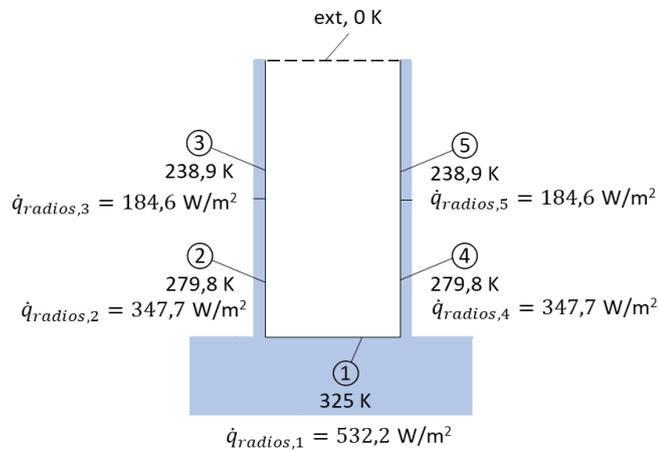
uma vez que cada uma delas está isolada e portanto não tem outras trocas de calor.

A superfície virtual que corresponde ao exterior/vazio (*ext*) não vai ser considerada, por não enviar radiação para as superfícies 1 a 5 (está a 0 K). Isto não significa que as superfícies não enviem radiação para o exterior: ela está incluída na radiosidade de cada uma, que compreende toda a radiação que sai de cada superfície.

Para obter as 5 radiosidades e as 4 temperaturas teremos de resolver o sistema de 9 equações, necessitando dos fatores de visão entre superfícies. Usando expressões da Figura 5.7, a par das relações de reciprocidade e sobreposição, obtêm-se os fatores da tabela seguinte.

outra superf (j) superf i considerada	①	②	③	④	⑤	ext
①	0	0,4037	0,0468	0,4037	0,0468	0,0990
②	0,1615	0	0	0,6770	0,1428	0,0187
③	0,0187	0	0	0,1428	0,6770	0,1615
④	0,1615	0,6770	0,1428	0	0	0,0187
⑤	0,0187	0,1428	0,677	0	0	0,1615

A soma dos fatores de cada linha é igual a 1, como se esperava (com a superfície exterior forma-se um volume fechado). A figura seguinte resume os resultados da resolução do sistema de equações.



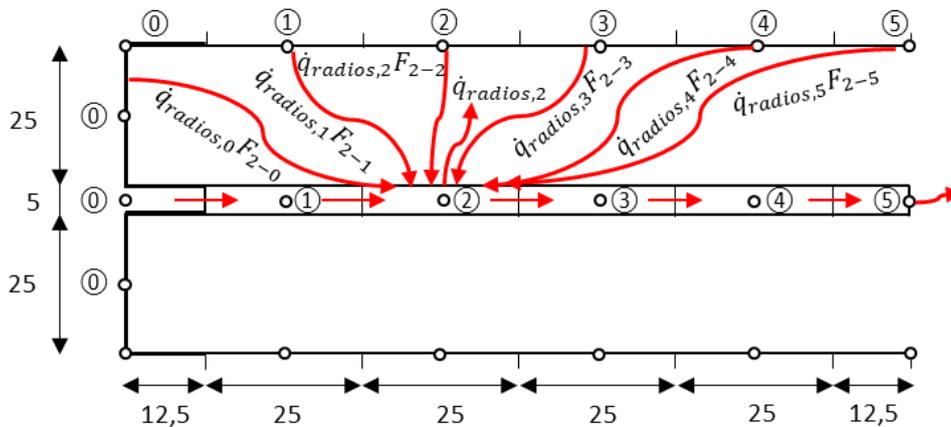
Quanto à potência dissipada para o exterior, pode obter-se do balanço de 1, ou:

$$\dot{Q}_{ext} = \dot{q}_{radios,1} A_1 F_{1-ext} + 2\dot{q}_{radios,2} A_2 F_{2-ext} + 2\dot{q}_{radios,3} A_3 F_{3-ext} = 5,9\text{ W/m}$$

Note-se a simetria da distribuição de temperaturas e radiosidades, como esperado. A temperatura média das superfícies 2 e 3 (ou 4 e 5) é de 259,4 K, quando antes as 2 superfícies agrupadas tinham uma temperatura praticamente igual de 259 K. No entanto, a potência dissipada é agora menor: 5,9 em vez de 7,1 W/m. Este facto deve-se à menor temperatura das superfícies laterais próximas do exterior, que é mais baixa do que na hipótese anterior (só com 2 superfícies laterais que foram agrupadas), reduzindo a potência perdida para o exterior; são as superfícies 3 e 5 (mais frias, a 238,9 K) que têm um maior fator de visão para o exterior, tendo por isso mais peso nas perdas.

Agora vamos contabilizar o efeito da variação da temperatura nas superfícies 2 originais ao longo da distância à base ($L=125$ mm), tendo também em conta a condução do calor ao longo de uma placa, que tem uma espessura de 5 mm e uma condutibilidade de 15 W/mK.

Para esse efeito vamos dividir a placa em elementos de volume finitos, tendo-se optado por usar 6 elementos e 6 nodos igualmente espaçados, desde a base até ao topo, como representa a figura seguinte. O nodo/elemento 0 representa a base, cuja temperatura é conhecida (325 K). Os elementos fronteira (0 e 5) têm metade do comprimento, estando os respetivos nodos colocados na sua extremidade. Os restantes têm um comprimento $\Delta L = 25$ mm. Em termos de trocas radiativas, o elemento 0 inclui uma pequena parte da superfície lateral, superfície que é considerada toda a 325 K. As superfícies dos outros elementos (1 a 5) são também consideradas a uma temperatura uniforme (T_1 a T_5).



Cada elemento recebe e troca radiação com elementos análogos da superfície da placa vizinha. Não havendo trocas dos elementos da mesma placa entre si, os elementos/superfícies da placa vizinha foram designados pelos mesmos números (0 a 6). Deste modo, as trocas de radiação entre superfícies de placas contíguas são referidas com fatores de visão F_{i-j} , em que i é o número do elemento de uma superfície da placa e j é o número do elemento da superfície em frente (da placa vizinha). A figura acima representa todos os fluxos (recebidos e perdidos) associados ao elemento 2. Há fluxos de radiação incidente (um para cada um dos correspondentes elementos da superfície oposta, e outro da base), um fluxo que sai (a radiosidade) e fluxos de condução através da espessura da placa (fronteiras do elemento). Saliente-se que existem outros tantos fluxos radiativos no elemento 2 na face oposta da mesma placa, pelo que em cada placa os fluxos radiativos serão multiplicados por 2. A título de exemplo, escreve-se a seguir a equação de balanço térmico para o elemento 2:

$$\frac{k}{\Delta L} e(T_1 - T_2) + 2\Delta L \sum_{j=0}^5 (\dot{q}_{radios,j} F_{2-j}) = \frac{k}{\Delta L} e(T_2 - T_3) + 2\Delta L \dot{q}_{radios,2}$$

Note-se que o elemento não recebe radiação do exterior, por este estar a 0 K. No entanto, perde calor para o exterior (incluído no que sai do elemento, $\dot{q}_{radios,2}$). As equações para os outros elementos interiores (3 e 4) são análogas a esta. As equações dos elementos 1 e 5 são diferentes (note-se que se conhece a temperatura $T_0 = 325$ K):

$$\frac{k}{\Delta L} e(325 - T_1) + 2\Delta L \sum_{j=0}^5 (\dot{q}_{radios,j} F_{1-j}) = \frac{k}{\Delta L} e(T_1 - T_2) + 2\Delta L \dot{q}_{radios,1}$$

$$\frac{k}{\Delta L} e(T_4 - T_5) + \frac{2\Delta L}{2} \sum_{j=0}^5 (\dot{q}_{radios,j} F_{5-j}) = e\epsilon\sigma T_5^4 + \frac{2\Delta L}{2} \dot{q}_{radios,5}$$

Às 5 equações de balanço térmico dos 5 elementos (1 a 5) é necessário adicionar 6 equações de radiosidade, por forma a conseguir calcular as 5 temperaturas (1 a 5) e as 6 radiosidades (0 a 5) desconhecidas. Estas têm a forma conhecida:

$$\dot{q}_{radios,i} = \epsilon\sigma T_i^4 + (1 - \epsilon) \sum_{j=0}^5 (\dot{q}_{radios,j} F_{i-j})$$

sendo que para $i=0$ (base) se multiplicam as irradiações de 1 a 5 por 2, por receber radiação de 2 faces das placas contíguas. Resta definir os fatores de visão para se poder resolver o sistema de equações. Considerando um volume fechado formado pelos 6 elementos (0 a 5) e pelo exterior (espaço entre topos de placas consecutivas), tendo em conta que o exterior não envia radiação, são necessários $6 \times 6 = 36$ fatores de visão. No entanto, diversos são iguais, devido à existência de simetrias. A tabela seguinte lista os fatores necessários, assinalando com a mesma cor fatores que têm o mesmo valor, atendendo à simetria existente.

superf contígua superf considerada	①	②	③	④	⑤	
①	F_{0-0}	F_{0-1}	F_{0-2}	F_{0-3}	F_{0-4}	F_{0-5}
②	F_{1-0}	F_{1-1}	F_{1-2}	F_{1-3}	F_{1-4}	F_{1-5}
③	F_{2-0}	F_{2-1}	F_{2-2}	F_{2-3}	F_{2-4}	F_{2-5}
④	F_{3-0}	F_{3-1}	F_{3-2}	F_{3-3}	F_{3-4}	F_{3-5}
⑤	F_{4-0}	F_{4-1}	F_{4-2}	F_{4-3}	F_{4-4}	F_{4-5}
⑥	F_{5-0}	F_{5-1}	F_{5-2}	F_{5-3}	F_{5-4}	F_{5-5}

O cálculo de F_{0-0} pode obter-se da relação de reciprocidade com uma superfície imaginária que une os extremos da superfície 0, vindo $F_{0-0} = 25/50 \times 1 = 0,5$. Esta superfície imaginária é também útil para calcular os fatores F_{i-0} . Para além disso, agrupando superfícies e usando expressões da Figura 5.7, a par das relações de reciprocidade e sobreposição, obtêm-se os fatores da tabela seguinte.

superf contígua superf considerada	①	②	③	④	⑤	
①	0,5	0,1464	0,0445	0,0184	0,0098	0,0061
②	0,2928	0,4142	0,2038	0,0524	0,0170	0,0080
③	0,0890	0,2038	0,4142	0,2038	0,0524	0,0105
④	0,0368	0,0524	0,2038	0,4142	0,2038	0,0340
⑤	0,0196	0,0170	0,0524	0,2038	0,4142	0,1353
⑥	0,0122	0,0160	0,0210	0,0680	0,2706	0,2361

Note-se que, para as superfícies 1 a 5, a diferença da soma dos valores de cada linha para 1 representa o fator dessa superfície para o exterior (vazio). A superfície 0 (base) troca radiação com duas faces contíguas das placas, pelo que se verifica:

$$F_{0-0} + 2(F_{0-1} + F_{0-2} + F_{0-3} + F_{0-4} + F_{0-5}) + F_{0-ext} = 1$$

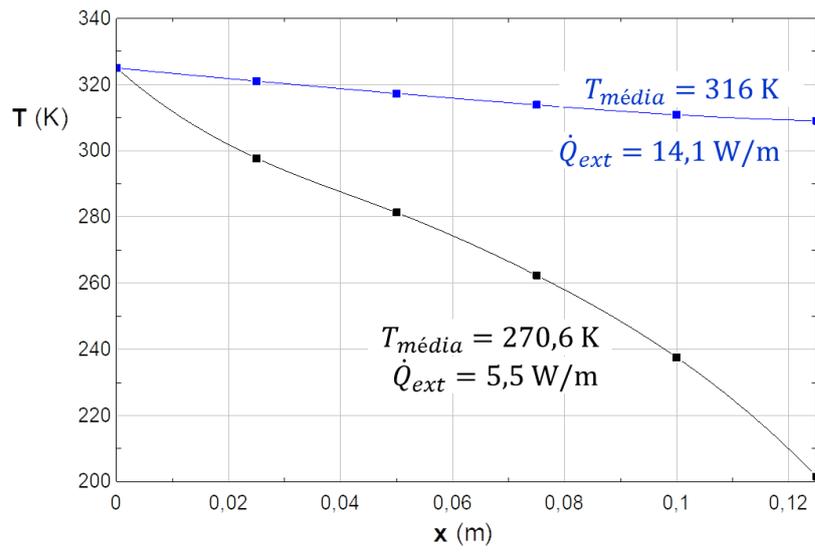
sendo então $F_{0-ext} = 0,0495$.

Pode então resolver-se o sistema de equações, calculando as 5 temperaturas e as 6 radiosidades. A potência que é dissipada em cada secção entre placas (ou em cada placa e porção da base respetiva) pode calcular-se através de:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{ext} = & \dot{q}_{radios,0}(\Delta L + S)F_{0-ext} + 2\Delta L\dot{q}_{radios,1}F_{1-ext} + 2\Delta L\dot{q}_{radios,2}F_{2-ext} + \\ & + 2\Delta L\dot{q}_{radios,3}F_{3-ext} + 2\Delta L\dot{q}_{radios,4}F_{4-ext} + 2\Delta L\dot{q}_{radios,5}F_{5-ext} + e\varepsilon\sigma T_5^4 \end{aligned}$$

sendo o último termo a perda no topo da placa.

A potência dissipada numa placa é igual a 14,1 W/m, sendo a parcela que passa por condução na base de 11,8 W/m. Há, portanto, um incremento muito grande da transferência de calor devido à condução. A figura seguinte representa as temperaturas nos 6 nodos, e mostra que ela varia relativamente pouco devido à condução (curva a cor azul). Para permitir uma comparação com os cálculos anteriores (sem condução), a figura representa também as temperaturas quando não se considera condução (curva a cor preta). Sem condução, a temperatura varia muito mais acentuadamente, e sobretudo junto à extremidade da placa, que perde mais calor para o exterior que as zonas junto à base. A potência dissipada, sem condução, é de 5,5 W/m, valor muito inferior aos 14,1 W/m quando se contabiliza a condução. Sem condução, a temperatura média das superfícies laterais (entre a base e o topo) é semelhante à calculada anteriormente (271 versus 259 K). A potência, sem condução, é mais baixa que as anteriores (5,5 versus 5,9 versus 7,1 W/m). Isto deve-se a que as zonas mais extremas (como o elemento 5) se encontram mais frias que ao considerar menos superfícies laterais (2 ou 1 superfície), havendo menos calor perdido para o exterior.



Referências

- [1] Theodore Bergman, Adrienne Lavine, Frank Incropera, David Dewitt (2011). Fundamentals of Heat and Mass Transfer. 7th edition. Ed. John Wiley & Sons.
- [2] Yunus Çengel, Afshin Ghajar (2015). Heat and Mass Transfer: Fundamentals & Applications. 5th edition. Ed. McGraw-Hill.
- [3] Suhas Patankar (1980). Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Ed. CRC Press.
- [4] Jean-Michel Bergheau, Roland Fortunier (2008). Finite Element Simulation of Heat Transfer. Ed. Wiley.
- [5] John Howell (1982). A Catalog of Radiation Configuration Factors. Ed. McGraw-Hill.

TRANSFERÊNCIA DE CALOR:

Um Guia para a Resolução de Problemas Práticos

ARMANDO CARLOS F. COELHO OLIVEIRA
Professor Catedrático da Universidade do Porto

Este livro revê conceitos e soluções para diversos problemas de Transferência de Calor, com o intuito de constituir um guia sistemático para a sua análise e resolução. Fomenta-se a compreensão dos fenómenos físicos e discutem-se hipóteses de cálculo, criticando sempre os resultados obtidos

ISBN 978-989-33-2674-9



9 789893 326749